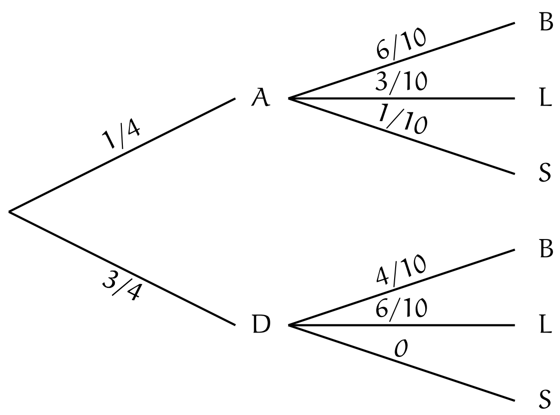
Nouvelle Calédonie. Mars 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



a) La probabilité demandée est $p(A \cap L)$.

$$P(A \cap L) = p(A) \times p_A(L) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}.$$

$$\boxed{P(A \cap L) = \frac{3}{40}.}$$

b) La probabilité demandée est $p(L)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(L) = p(A) \times p_A(L) + p(D) \times p_D(L) = \frac{3}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{40} + \frac{18}{40} = \frac{21}{40}.$$

$$\boxed{P(L) = \frac{21}{40}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_L(D)$.

$$p_L(D) = \frac{p(D \cap L)}{p(L)} = \frac{p(D) \times p_D(L)}{p(L)} = \frac{(3/4) \times (6/10)}{21/40} = \frac{18}{40} \times \frac{40}{21} = \frac{6}{7}.$$

$$\boxed{P_L(D) = \frac{6}{7}.}$$

2) Si la médaille tirée représente le château de Saumur, il est certain que cette médaille est argentée ou encore

$$\boxed{p_S(A) = 1.}$$

Partie B

1) Pour des raisons de symétrie, la probabilité demandée est $P(X < 9,9) + P(X > 10,1) = P(X < \mu - 0,1) + P(X > \mu + 0,1) = 2P(X \leqslant \mu - 0,1) = 2P(X \leqslant 9,9)$. La calculatrice fournit

$$2P(X \leqslant 9,9) = 0,096 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'une médaille produite par la machine } M_1 \text{ ne soit pas conforme est arrondi à } 10^{-3}.}$$

2) a) On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

b) La probabilité que la machine M_2 produise une médaille non conforme est $P(Y < 9,9)+P(Y > 10,1) = 2P(Y \leqslant 9,9)$. Or

$$Y \leqslant 9,9 \Leftrightarrow Y - 10 \leqslant -0,1 \Leftrightarrow \frac{Y-10}{\sigma} \leqslant -\frac{0,1}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}.$$

Par suite,

$$2P(Y \leqslant 9,9) = 0,06 \Leftrightarrow 2P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,06 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,03.$$

La calculatrice fournit $-\dfrac{0,1}{\sigma} = -1,88079\ldots$ puis

$\boxed{\sigma = 0,053 \text{ arrondi au millième.}}$

EXERCICE 2

• Déterminons tout d'abord les abscisses des points A et B. On sait que les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Soit $x \in [0, 16]$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(1 + x) = \ln(1 + x) + 1 - \cos x \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 2k\pi.$$

De plus, $0 < 2k\pi \leqslant 16 \Leftrightarrow 0 < k \leqslant \dfrac{8}{\pi} \Leftrightarrow k = 1$ ou $k = 2$. L'abscisse du point A est 2π et l'abscisse du point B est 4π.

• Pour tout réel x de $[0, 16]$, $g(x) - f(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ et donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0, 16]$. L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée la plus à gauche est

$$\mathscr{A}_1 = \int_0^{2\pi} (g(x) - f(x))\ dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)\ dx = [x - \sin x]_0^{2\pi} = (2\pi - \sin(2\pi)) - (0 - \sin(0)) = 2\pi.$$

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée la plus à droite est

$$\mathscr{A}_2 = \int_{2\pi}^{4\pi} (g(x) - f(x))\ dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos x)\ dx = [x - \sin x]_{2\pi}^{4\pi} = (4\pi - \sin(4\pi)) - (2\pi - \sin(2\pi)) = 2\pi.$$

Les deux aires sont égales.

EXERCICE 3

1) Soit m un réel.

$$\begin{aligned} A \in P_m &\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2x_A + (m-1)y_A + \frac{1}{2}mz_A - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + (m-1) + \frac{1}{2}m - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 6m - 16 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $x^2+6x-16=0$ est $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 100 > 0$. L'équation $x^2+6x-16=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-6+\sqrt{100}}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6-\sqrt{100}}{2} = -8$.

Les valeurs de m pour lesquelles le point A appartient au plan P_m sont -8 et 2.

2) P_1 est le plan d'équation $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}z - 3 = 0$ ou encore $x + 2z - 12 = 0$. P_{-4} est le plan d'équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$.

Un vecteur normal au plan P_1 est le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1, 0, 2)$ et un vecteur normal au plan P_{-4} est le vecteur $\overrightarrow{n_{-4}}$ de coordonnées $(4, -5, -2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_{-4}}$ ne sont pas colinéaires (en analysant la deuxième coordonnée) et donc les plans P_1 et P_{-4} ne sont pas parallèles et donc les plans P_1 et P_{-4} sont sécants en une droite que l'on note (D). Vérifions que $(D) = (d)$.

Soit $M(12-2t, 9-2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$x_M + 2z_M - 12 = (12-2t) + 2t - 12 = 0.$$

Donc, tout point M de (d) appartient au plan P_1.

$$4x_M - 5y_M - 2z_M - 3 = 4(12-2t) - 5(9-2t) - 2t - 3 = 48 - 8t - 45 + 10t - 2t - 3 = 0.$$

Donc, tout point M de (d) appartient au plan P_{-4}. Ainsi, la droite (d) est la droite d'intersection des plans P_1 et P_{-4}.

3) a) P_0 est le plan d'équation $-y-3=0$ ou encore $y+3=0$. Soit $M(12-2t, 9-2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$M \in P_0 \Leftrightarrow y_M + 3 = 0 \Leftrightarrow 9 - 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 6.$$

Pour $t = 6$, on obtient le point B de coordonnées $(0, -3, 6)$.

b) Soit m un réel.

$$\frac{1}{4}m^2x_B + (m-1)y_B + \frac{1}{2}mz_B - 3 = -3(m-1) + 3m - 3 = 0.$$

Donc, le point B apprtient à tous les plans P_m, $m \in \mathbb{R}$.

c) Un point appartenant à tous les plans P_m appartient nécessairement aux plans P_0, P_1 et P_{-4} et donc au plan P_0 et à la droite (d). Un tel point est donc nécessairement le point B.

Le point B est l'unique point de l'espace appartenant à tous les plans P_m, $m \in \mathbb{R}$.

4) a) Avec les notations de la question 2),

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_{-4}} = 1 \times 4 + 0 \times (-5) + 2 \times (-2) = 0.$$

Donc, les plans P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b) Soient m et m' deux réels. Un vecteur normal au plan P_m (resp. $P_{m'}$) est le vecteur $\overrightarrow{n_m}$ (resp. $\overrightarrow{n_{m'}}$) de coordonnées $\left(\dfrac{m^2}{4}, (m-1), \dfrac{m}{2}\right)$ (resp. $\left(\dfrac{m'^2}{4}, (m'-1), \dfrac{m'}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} P_m \perp P_{m'} &\Leftrightarrow \overrightarrow{n_m}.\overrightarrow{n_{m'}} = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4}\frac{m'^2}{4} + (m-1)(m'-1) + \frac{m}{2}\frac{m'}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0. \end{aligned}$$

c) Cette dernière condition équivaut à $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$ (après multiplication par 16 des deux membres de l'égalité).

L'algorithme affiche tous les couples (m, m') d'entiers relatifs compris au sens large entre -10 et 10 tels que les plans P_m et $P_{m'}$ soient perpendiculaires.

d) Si (m, m') est un couple solution, alors (m', m) est un couple solution. Donc, le problème admet au moins les six couples solutions $(-4, 1)$, $(0, 1)$, $(5, -4)$, $(1, -4)$, $(1, 0)$, $(-4, 5)$. L'énoncé dit que l'algorithme affiche exactement six couples solutions et donc l'algorithme affiche dans l'ordre les couples

$$(-4, 1) \quad (-4, 5) \quad (0, 1) \quad (1, -4) \quad (1, 0) \quad (5, -4).$$

EXERCICE 4.

1) a) $\left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{3}{9}} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ puis

$$1+i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\times 3}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\boxed{1+i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}.}$$

b) $z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times z_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times z_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$\boxed{z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}.}$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

- $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{i0\frac{\pi}{6}} = 1 = z_0$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$. Alors

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times z_n \text{ (d'après 1))} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.}$$

b) Pour tout entier naturel n, A_n a pour coordonnées $\left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ a pour coordonnées $\left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right)$. Le point A_0 a pour coordonnées $(1, 0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{OA_0}$ a pour coordonnées $(1, 0)$.

$$\begin{aligned}
O,\ A_0,\ A_n \text{ alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_0} \text{ et } \overrightarrow{OA_n} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow 1\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) - 0\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe } k\in\mathbb{N} \text{ tel que } \frac{n\pi}{6} = k\pi \text{ (car } n \text{ est un entier naturel)} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } k\in\mathbb{N} \text{ tel que } n = 6k.
\end{aligned}$$

Les entiers n pour lesquels le points O, A_0 et A_n sont alignés sont les multiples de 6.

3) a) Pour tout entier naturel n, $d_n = A_nA_{n+1}$.

b) $d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1\right| = \left|i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\boxed{d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.}$$

c) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d) Pour tout entier naturel n,

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n \text{ (d'après 1)).}$$

Ainsi, la suite $(d_n)_{n \geqslant 0}$ est la suite géométrique de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$d_n = d_0 \times q^n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.}$$

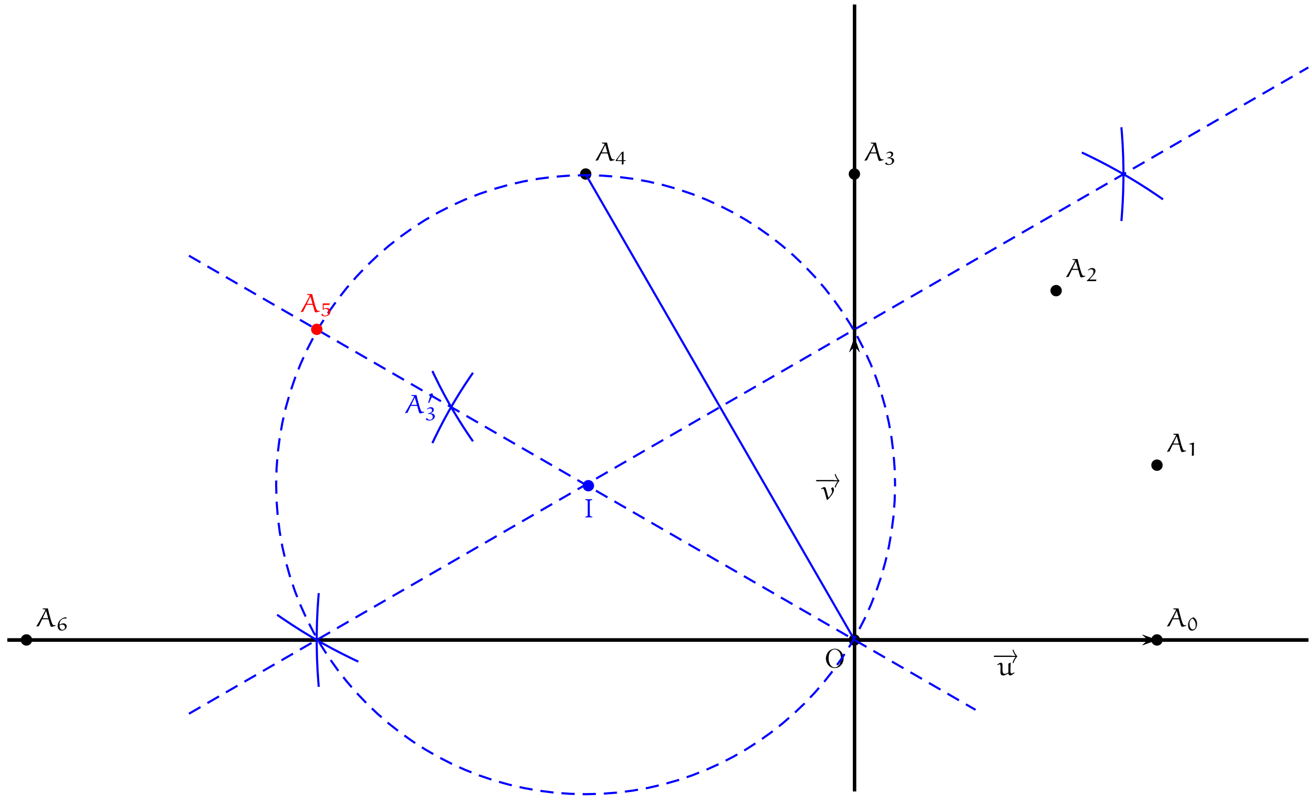
4) a) Soit n un entier naturel. D'après la question 2)a), $|z_n| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ et donc

$$\begin{aligned}
|z_n|^2 + d_n^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2(n+1)} \\
&= |z_{n+1}|^2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ |z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.}$$

b) On en déduit que pour tout entier naturel n, $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c)



d) • Pour tout entier nature n, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_n}\right) = \arg(z_n) = n\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ puis

$$\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = \left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = -n\frac{\pi}{6} + (n+1)\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

• En particulier, $\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_5}\right) = \left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_4}\right) + \left(\overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OA_5}\right) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

Soit A_3' le point d'abscisse négative tel que le triangle OA_3A_3' soit équilatéral. Alors, $\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_3'}\right) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et la demi-droite $[OA_5)$ est encore la demi-droite $[OA_3')$. On obtient le point A_3' comme intersection du cercle de centre O passant par A_3 et du cercle de centre A_3 passant par O puis on trace la demi-droite $[OA_3')$.

• Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4. Donc, le cercle circonscrit au triangle OA_4A_5 est le cercle de diamètre $[OA_5]$. Le centre I de ce cercle est à égale distance de O et A_4. On construit donc au compas la médiatrice du segment $[OA_4]$. Cette médiatrice coupe $[OA_3')$ en I. On trace ensuite le cercle de centre I passant par O. Il recoupe la demi-droite $[OA_3')$ en A_5.

