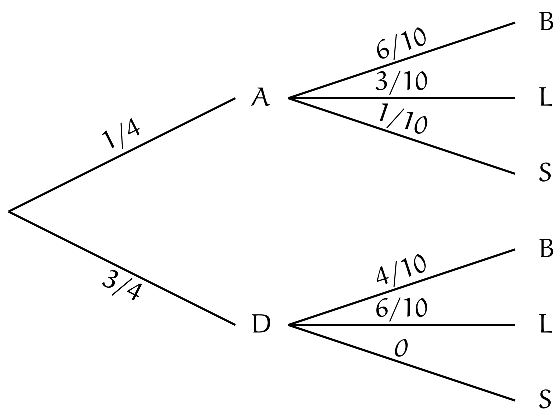
Nouvelle Calédonie. Mars 2016. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



a) La probabilité demandée est $p(A \cap L)$.

$$P(A \cap L) = p(A) \times p_A(L) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}.$$

$$\boxed{P(A \cap L) = \frac{3}{40}.}$$

b) La probabilité demandée est $p(L)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(L) = p(A) \times p_A(L) + p(D) \times p_D(L) = \frac{3}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{40} + \frac{18}{40} = \frac{21}{40}.$$

$$\boxed{P(L) = \frac{21}{40}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_L(D)$.

$$p_L(D) = \frac{p(D \cap L)}{p(L)} = \frac{p(D) \times p_D(L)}{p(L)} = \frac{(3/4) \times (6/10)}{21/40} = \frac{18}{40} \times \frac{40}{21} = \frac{6}{7}.$$

$$\boxed{P_L(D) = \frac{6}{7}.}$$

2) Si la médaille tirée représente le château de Saumur, il est certain que cette médaille est argentée ou encore

$$\boxed{p_S(A) = 1.}$$

Partie B

1) Pour des raisons de symétrie, la probabilité demandée est $P(X < 9,9) + P(X > 10,1) = P(X < \mu - 0,1) + P(X > \mu + 0,1) = 2P(X \leqslant \mu - 0,1) = 2P(X \leqslant 9,9)$. La calculatrice fournit

$$2P(X \leqslant 9,9) = 0,096 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'une médaille produite par la machine } M_1 \text{ ne soit pas conforme est arrondi à } 10^{-3}.}$$

2) a) On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

b) La probabilité que la machine M_2 produise une médaille non conforme est $P(Y < 9,9)+P(Y > 10,1) = 2P(Y \leqslant 9,9)$. Or

$$Y \leqslant 9,9 \Leftrightarrow Y - 10 \leqslant -0,1 \Leftrightarrow \frac{Y-10}{\sigma} \leqslant -\frac{0,1}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}.$$

Par suite,

$$2P(Y \leqslant 9,9) = 0,06 \Leftrightarrow 2P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,06 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,03.$$

La calculatrice fournit $-\dfrac{0,1}{\sigma} = -1,88079\ldots$ puis

$$\boxed{\sigma = 0,053 \text{ arrondi au millième.}}$$

EXERCICE 2

• Déterminons tout d'abord les abscisses des points A et B. On sait que les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Soit x un réel strictement supérieur à -1.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \ln(1+x) + 1 - \cos x \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 2k\pi.$$

De plus, $0 < 2k\pi \leqslant 16 \Leftrightarrow 0 < k \leqslant \dfrac{8}{\pi} \Leftrightarrow k = 1$ ou $k = 2$. L'abscisse du point A est 2π et l'abscisse du point B est 4π.

• Pour tout réel x de $[0, 16]$, $g(x) - f(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ et donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0, 16]$. L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée la plus à gauche est

$$\mathscr{A}_1 = \int_0^{2\pi} (g(x) - f(x))\ dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)\ dx = [x - \sin x]_0^{2\pi} = (2\pi - \sin(2\pi)) - (0 - \sin(0)) = 2\pi.$$

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée la plus à droite est

$$\mathscr{A}_2 = \int_{2\pi}^{4\pi} (g(x) - f(x))\ dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos x)\ dx = [x - \sin x]_{2\pi}^{4\pi} = (4\pi - \sin(4\pi)) - (2\pi - \sin(2\pi)) = 2\pi.$$

Les deux aires sont égales.

EXERCICE 3

1) Soit m un réel.

$$\begin{aligned}A \in P_m &\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2x_A + (m-1)y_A + \frac{1}{2}mz_A - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + (m-1) + \frac{1}{2}m - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m - 4 = 0\\ &\Leftrightarrow m^2 + 6m - 16 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $x^2 + 6x - 16 = 0$ est $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 100 > 0$. L'équation $x^2 + 6x - 16 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-6 + \sqrt{100}}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6 - \sqrt{100}}{2} = -8$.

Les valeurs de m pour lesquelles le point A appartient au plan P_m sont -8 et 2.

2) P_1 est le plan d'équation $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z - 3 = 0$ ou encore $x + 2z - 12 = 0$. P_{-4} est le plan d'équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$.

Un vecteur normal au plan P_1 est le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1, 0, 2)$ et un vecteur normal au plan P_{-4} est le vecteur $\overrightarrow{n_{-4}}$ de coordonnées $(4, -5, -2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_{-4}}$ ne sont pas colinéaires (en analysant la deuxième coordonnée) et donc les plans P_1 et P_{-4} ne sont pas parallèles et donc les plans P_1 et P_{-4} sont sécants en une droite que l'on note (D). Vérifions que $(D) = (d)$.

Soit $M(12 - 2t, 9 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$x_M + 2z_M - 12 = (12 - 2t) + 2t - 12 = 0.$$

Donc, tout point M de (d) appartient au plan P_1.

$$4x_M - 5y_M - 2z_M - 3 = 4(12 - 2t) - 5(9 - 2t) - 2t - 3 = 48 - 8t - 45 + 10t - 2t - 3 = 0.$$

Donc, tout point M de (d) appartient au plan P_{-4}. Ainsi, la droite (d) est la droite d'intersection des plans P_1 et P_{-4}.

3) a) P_0 est le plan d'équation $-y - 3 = 0$ ou encore $y + 3 = 0$. Soit $M(12 - 2t, 9 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$M \in P_0 \Leftrightarrow y_M + 3 = 0 \Leftrightarrow 9 - 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 6.$$

Pour $t = 6$, on obtient le point B de coordonnées $(0, -3, 6)$.

b) Soit m un réel.

$$\frac{1}{4}m^2x_B + (m-1)y_B + \frac{1}{2}mz_B - 3 = -3(m-1) + 3m - 3 = 0.$$

Donc, le point B apprtient à tous les plans P_m, $m \in \mathbb{R}$.

c) Un point appartenant à tous les plans P_m appartient nécessairement aux plans P_0, P_1 et P_{-4} et donc au plan P_0 et à la droite (d). Un tel point est donc nécessairement le point B.

Le point B est l'unique point de l'espace appartenant à tous les plans P_m, $m \in \mathbb{R}$.

4) a) Avec les notations de la question 2),

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_{-4}} = 1 \times 4 + 0 \times (-5) + 2 \times (-2) = 0.$$

Donc, les plans P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b) Soient m et m' deux réels. Un vecteur normal au plan P_m (resp. $P_{m'}$) est le vecteur $\overrightarrow{n_m}$ (resp. $\overrightarrow{n_{m'}}$) de coordonnées $\left(\dfrac{m^2}{4}, (m-1), \dfrac{m}{2}\right)$ (resp. $\left(\dfrac{m'^2}{4}, (m'-1), \dfrac{m'}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}P_m \perp P_{m'} &\Leftrightarrow \overrightarrow{n_m}.\overrightarrow{n_{m'}} = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4}\frac{m'^2}{4} + (m-1)(m'-1) + \frac{m}{2}\frac{m'}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0.\end{aligned}$$

c) Cette dernière condition équivaut à $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$ (après multiplication par 16 des deux membres de l'égalité).

L'algorithme affiche tous les couples (m, m') d'entiers relatifs compris au sens large entre -10 et 10 tels que les plans P_m et $P_{m'}$ soient perpendiculaires.

d) Si (m, m') est un couple solution, alors (m', m) est un couple solution. Donc, le problème admet au moins les six couples solutions $(-4, 1)$, $(0, 1)$, $(5, -4)$, $(1, -4)$, $(1, 0)$, $(-4, 5)$. L'énoncé dit que l'algorithme affiche exactement six couples solutions et donc l'algorithme affiche dans l'ordre les couples

$$(-4, 1) \quad (-4, 5) \quad (0, 1) \quad (1, -4) \quad (1, 0) \quad (5, -4).$$

EXERCICE 4.

Partie A

1) La lettre L correspond à $x = 11$. $7x + 5 = 7 \times 11 + 5 = 82 = 3 \times 26 + 4$ avec $0 \leqslant 4 \leqslant 25$. Donc $y = 4$. 4 correspond à la lettre E.

$$\boxed{\text{La lettre L est codée par la lettre E.}}$$

2) a) $15 \times 7 = 105 = 4 \times 26 + 1$ et donc $15 \times 7 \equiv 1$ [26].

Soit k un entier relatif. $k \equiv 7x$ [26] $\Rightarrow 15k \equiv 15 \times 7x$ [26] $\Rightarrow 15k \equiv x$ [26].

b) Soit k un entier relatif. $15k \equiv x$ [26] $\Rightarrow 7 \times 15k \equiv 7x$ [26] $\Rightarrow k \equiv 7x$ [26].

c) D'après les deux questions précédentes

$$\begin{aligned} y \equiv 7x + 5\ [26] &\Leftrightarrow y - 5 \equiv 7x\ [26] \Leftrightarrow 15(y-5) \equiv x\ [26] \Leftrightarrow x \equiv 15y - 75\ [26] \\ &\Leftrightarrow x \equiv 15y - 75 + 3 \times 26\ [26] \Leftrightarrow x \equiv 15y + 3\ [26]. \end{aligned}$$

3) La lettre F correspond à $y = 5$. $15y + 3 = 15 \times 5 + 3 = 78 = 3 \times 26$. Donc $x = 0$. 0 correspond à la lettre A.

$$\boxed{\text{La lettre F code la lettre A.}}$$

Partie B

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $a_n = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^n - \dfrac{5}{6}$.

- $\left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^0 - \dfrac{5}{6} = a_0 + \dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{6} = a_0$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $a_n = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^n - \dfrac{5}{6}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 7a_n + 5 \\ &= 7\left[\left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}\right] + 5 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^{n+1} - \frac{35}{6} + \frac{30}{6} \\ &= \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^{n+1} - \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}.}$$

Partie C

La lettre Q correspond à $y = 16$. 16 est le résultat de 6 chiffrements affines successifs.
Il faut appliquer 6 fois le chiffrement inverse à $y = 16$ pour découvrir le nombre initial.
On part de $b_0 = 16$ et on applique 6 fois la transformation affine $y \mapsto 15y + 3$. On obtient

$$b_6 = \left(16 + \frac{3}{14}\right) \times 15^6 - \frac{3}{14} = \frac{227 \times 15^6 - 3}{14} = 184\,690\,848.$$

Ensuite, $184\,690\,848 = 7\,103\,494 \times 26 + 4$ avec $0 \leqslant 4 \leqslant 25$. 4 correspond à la lettre E et donc

$$\boxed{\text{La lettre Q code la lettre E.}}$$

