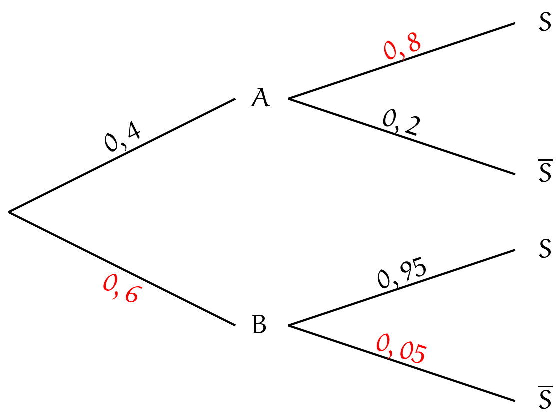
France métropolitaine. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(S) &= P(A)\times P_A(S) + P(B)\times P_B(S)\\ &= 0,4\times 0,8 + 0,6\times 0,95 = 0,32 + 0,57 = 0,89.\end{aligned}$$

$$\boxed{P(S) = 0,89.}$$

2) La probabilité demandée est $P_S(A)$.

$$P_S(A) = \frac{P(A\cap S)}{P(S)} = \frac{0,4\times 0,8}{0,89} = \frac{32}{89} = 0,36 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

$$\boxed{P_S(A) = 0, \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

Partie B

1) Ici $n = 400$ et $f = 0,92$. On note que $nf = 368$ et $n(1-f) = 32$ de sorte que $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}}, 0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,87; 0,97].$$

La proportion p appartient à l'intervalle $[0,87; 0,97]$ au niveau de confiance 95%.

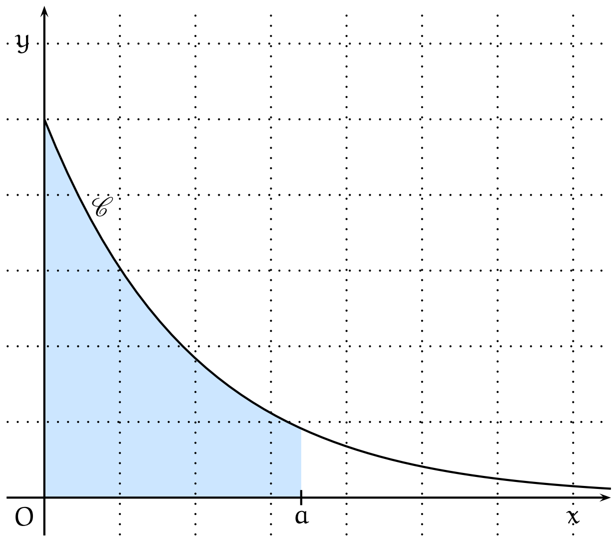
2) Soit n la taille de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
L'amplitude de cet intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 100\\ \Leftrightarrow n \geqslant 10\,000 \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[).\end{aligned}$$

La taille minimum de l'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit au maximum $0,02$ est $10\,000$.

Partie C

1) a) Interprétation graphique. $P(T \leqslant a)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré en bleu ci-dessous.



b) Soit $t \geqslant 0$.

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

c) Puisque $\lambda > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1 - 0 = 1$.

2)

$$\begin{aligned} P(T \leqslant 7) = 0,5 &\Leftrightarrow 1 - e^{-7\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-7\lambda} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow -7\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{7} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0,0990\ldots \end{aligned}$$

Donc, $\lambda = 0,099$ arrondi à 10^{-3}.

3) Pour tout réel positif t, $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-0,099t}$ et donc aussi $P(T \geqslant t) = e^{-0,099t}$.

a) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 5)$.

$$P(T \geqslant 5) = e^{-0,099 \times 5} = e^{-0,495} = 0,61 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

b) La probabilité demandée est $P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7)$. On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7) = P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 5 + 2) = P(T \geqslant 5) = 0,61 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

c) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$. Donc, ici, $E(T) = \frac{1}{0,099} = 10$ arrondi à l'unité. Ceci signifie qu'en moyenne, un composant vit 10 ans.

EXERCICE 2

Justification 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2, -2, -2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2, -2, -2)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $-2 = 2k$ et aussi $-2 = -2k$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore que les points A, B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est fausse.

Justification 2. Les points A, B et C définissent donc un unique plan et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. La droite (EF) est la droite passant par $E(-1, -2, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}(-1, -1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (EF) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, le plan (ABC) est le plan passant par $A(1, 2, 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(0, 1, -1)$. Une équation du plan (ABC) est $0 \times (x - 1) + 1 \times (y - 2) - 1 \times (z - 3) = 0$ ou encore $y - z + 1 = 0$.

Soit $M(-1 - t, -2 - t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EF).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (-2 - t) - (3 + t) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Pour $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. Ainsi, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. D'autre part, le milieu du segment [BC] a pour coordonnées $\left(\dfrac{3-1}{2}, \dfrac{0+0}{2}, \dfrac{1+1}{2}\right)$ ou encore $(1, 0, 1)$. La droite (EF) et le plan (ABC) sont effectivement sécants en le milieu du segment [BC].

L'affirmation 3 est vraie.

Justification 4.

1ère solution. Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, elles sont en particulier coplanaires et on en déduit que le point B appartient au plan (ABC). Mais $y_D - z_D + 1 = 1 - (-1) + 1 = 3 \neq 0$. Donc, le point D n'appartient pas au plan (ABC) et finalement les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2ème solution. La droite (AB) est la droite passant par $A(1, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1, -1, -1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

La droite (CD) est la droite passant par $C(-1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}(3, 1, -2)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 3u \\ y = u \\ z = 1 - 2u \end{array}\right., \ u \in \mathbb{R}.$$

Soient $M(1 + t, 2 - t, 3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB) et $N(-1 + 3u, u, 1 - 2u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CD).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+t=-1+3u \\ 2-t=u \\ 3-t=1-2u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ 1+t=-1+3(2-t) \\ 3-t=1-2(2-t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ 4t=4 \\ -3t=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est fausse.}}$

EXERCICE 3

Partie A

1) Soit x un réel.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln\left(x^2+1\right) = x \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'équation $f(x) = x$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution et une seule à savoir 0.

2) Dérivée et variations. Pour tout réel x, $x^2+1 > 0$ et donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour x réel,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (et s'annule en 1). Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln\left(x^2+1\right) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et en additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

3) Soit x un réel de $[0,1]$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0,1]$, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ avec $f(0) = 0$ (d'après la question 1)) et $f(1) = 1 - \ln 2 = 0,3\ldots$. En particulier, si $x \in [0,1]$, alors $f(x) \in [0,1]$.

4) a) A étant un réel donné, l'algorithme affiche la plus petite valeur de l'entier N pour laquelle on a $f(N) \geqslant A$.

b) D'après le tableau de variations de f, la suite $\left(N - \ln\left(N^2+1\right)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

La calculatrice fournit $f(109) = 99,6\ldots$ et $f(110) = 100,5\ldots$ L'algorithme affiche donc 110.

Partie B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0,1]$.

- $u_0 = 1$ et donc la propriété est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \in [0,1]$. Alors, $f\left(u_n\right) \in [0,1]$ d'après la question 3 de la partie A ou encore $u_{n+1} \in [0,1]$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \in [0,1].}$$

2) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$. Or, $u_n^2+1 > 1$ puis $\ln\left(u_n^2+1\right) > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

3) La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ positif ou nul.

4) D'après la question 1) de la partie A, l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule à savoir 0. Donc,

$$\boxed{\ell = 0.}$$

EXERCICE 4

1) Dans le triangle TEA rectangle en E, on a

$$\tan(\alpha) = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}.$$

De même, dans le triangle TEB rectangle en E, on a

$$\tan(\beta) = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}.$$

2) La fonction tan est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour x réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La dérivée de la fonction tangente est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3)

$$\tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{25}{x} \times \frac{30,6}{x}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}}$$

$$= \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765} = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$$

4) Pour $x \in]0, 50]$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 765}{x}$ puis $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x}{x^2 + 765}$ et enfin

$$\tan(\gamma) = 5,6 \times \frac{x}{x^2 + 765} = 5,6 \times \frac{1}{f(x)} = \frac{5,6}{f(x)}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{5,6}{t}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (et que pour tout x de $]0, 50]$, $f(x) > 0$), $\tan(\gamma)$ est maximum si et seulement si $f(x)$ est minimum.

La fonction f est dérivable sur $]0, 50]$ et pour tout réel x de $]0, 50]$,

$$f'(x) = 1 + 765 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2} = \frac{\left(x - \sqrt{765}\right)\left(x + \sqrt{765}\right)}{x^2}.$$

Sur $]0, 50]$, on a $x^2 > 0$ et $x + \sqrt{765} > 0$. Sur $]0, 50]$, $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{765}$ avec $\sqrt{765} = 27,6\ldots$ et donc $\sqrt{765} \in]0, 50]$. Par suite, la fonction f est strictement décroissante sur $\left]0, \sqrt{765}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\sqrt{765}, 50\right]$. La fonction f admet un minimum en $x_0 = \sqrt{765}$.

L'angle $\widehat{ATB}$ est donc maximum pour $ET = \sqrt{765}$ et donc pour maximiser ses chances, le joueur doit se placer à 28 mètres, arrondi au mètre, de la ligne d'essai. Dans ce cas, $\tan(\gamma) = \dfrac{5,6\sqrt{765}}{1530}$ et donc l'angle maximum mesure $0,1$ radian arrondi à $0,01$ radian (fourni par la calculatrice) soit environ $6°$.

