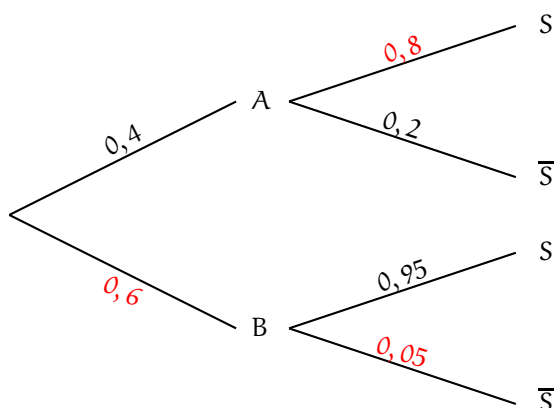


EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) \\ = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = 0,32 + 0,57 = 0,89.$$

$$P(S) = 0,89.$$

2) La probabilité demandée est $P_S(A)$.

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} = \frac{32}{89} = 0,36 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

$$P_S(A) = 0, \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

Partie B

1) Ici $n = 400$ et $f = 0,92$. On note que $nf = 368$ et $n(1 - f) = 32$ de sorte que $n \geq 30$, $nf \geq 5$ et $n(1 - f) \geq 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}}, 0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}} \right] = [0,87; 0,97].$$

La proportion p appartient à l'intervalle $[0,87; 0,97]$ au niveau de confiance 95%.

2) Soit n la taille de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

L'amplitude de cet intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

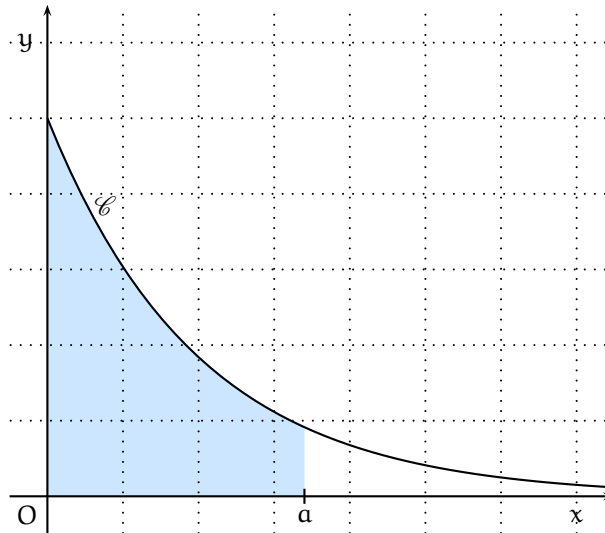
$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 100$$

$$\Leftrightarrow n \geq 10\,000 \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[).$$

La taille minimum de l'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit au maximum 0,02 est 10 000.

Partie C

1) a) **Interprétation graphique.** $P(T \leq a)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré en bleu ci-dessous.



b) Soit $t \geq 0$.

$$P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = (-e^{-\lambda t}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

c) Puisque $\lambda > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(T \leq t) = 1 - 0 = 1$.

2)

$$\begin{aligned} P(T \leq 7) = 0,5 &\Leftrightarrow 1 - e^{-7\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-7\lambda} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow -7\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{7} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0,0990\dots \end{aligned}$$

Donc, $\lambda = 0,099$ arrondi à 10^{-3} .

3) Pour tout réel positif t , $P(T \leq t) = 1 - e^{-0,099t}$ et donc aussi $P(T \geq t) = e^{-0,099t}$.

a) La probabilité demandée est $P(T \geq 5)$.

$$P(T \geq 5) = e^{-0,099 \times 5} = e^{-0,495} = 0,61 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

b) La probabilité demandée est $P_{T \geq 2}(T \geq 7)$. On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{T \geq 2}(T \geq 7) = P_{T \geq 2}(T \geq 5 + 2) = P(T \geq 5) = 0,61 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

c) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$. Donc, ici, $E(T) = \frac{1}{0,099} = 10$ arrondi à l'unité. Ceci signifie qu'en moyenne, un composant vit 10 ans.

EXERCICE 2

Justification 1. Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(2, -2, -2)$ et le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $(-2, -2, -2)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $-2 = 2k$ et aussi $-2 = -2k$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. On en déduit que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires ou encore que les points A, B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est fausse.

Justification 2. Les points A, B et C définissent donc un unique plan et les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC).

L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. La droite (EF) est la droite passant par E $(-1, -2, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}(-1, -1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (EF) est

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, le plan (ABC) est le plan passant par A $(1, 2, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(0, 1, -1)$. Une équation du plan (ABC) est $0 \times (x - 1) + 1 \times (y - 2) - 1 \times (z - 3) = 0$ ou encore $y - z + 1 = 0$.

Soit M $(-1 - t, -2 - t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EF).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (-2 - t) - (3 + t) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Pour $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. Ainsi, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. D'autre part, le milieu du segment [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$ ou encore $(1, 0, 1)$. La droite (EF) et le plan (ABC) sont effectivement sécants en le milieu du segment [BC].

L'affirmation 3 est vraie.

Justification 4.

1ère solution. Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, elles sont en particulier coplanaires et on en déduit que le point B appartient au plan (ABC). Mais $y_D - z_D + 1 = 1 - (-1) + 1 = 3 \neq 0$. Donc, le point D n'appartient pas au plan (ABC) et finalement les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2ème solution. La droite (AB) est la droite passant par A $(1, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1, -1, -1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

La droite (CD) est la droite passant par C $(-1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}(3, 1, -2)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est

$$\begin{cases} x = -1 + 3u \\ y = u \\ z = 1 - 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Soient M $(1 + t, 2 - t, 3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB) et N $(-1 + 3u, u, 1 - 2u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CD).

$$M = N \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t = -1 + 3u \\ 2 - t = u \\ 3 - t = 1 - 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - t \\ 1 + t = -1 + 3(2 - t) \\ 3 - t = 1 - 2(2 - t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - t \\ 4t = 4 \\ -3t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - t \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

L'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 3

1) a) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs. $15x - 12y = 3(5x - 4y)$ où $5x - 4y$ est un entier relatif. Donc, l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.

b) Soient (x, y) un couple d'entiers relatifs puis M le point de coordonnées (x, y) .

$$\begin{aligned}M \in \Delta_1 &\Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{15x - 8}{12} \Leftrightarrow 12y = 15x - 8 \\ &\Leftrightarrow 15x - 12y = 8.\end{aligned}$$

Maintenant, $15x - 12y$ est un entier divisible par 3 et 8 n'est pas un entier divisible par 3. Donc, l'entier $15x - 12y$ n'est pas égal à l'entier 8.

On a montré qu'il n'existe pas de couple (x, y) d'entiers relatifs tel que $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$ ou encore, il n'existe pas de point de Δ_1 dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Généralisation.

2) a) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de Δ à coordonnées entières.

$$\begin{aligned}M_0 \in \Delta &\Leftrightarrow y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q} \Leftrightarrow y_0 = \frac{mqx_0 - np}{nq} \Leftrightarrow nqy_0 = mqx_0 - np \\ &\Leftrightarrow q(mx_0 - ny_0) = np.\end{aligned}$$

b) Ainsi, si il existe un point de Δ dont les coordonnées (x_0, y_0) sont des nombres entiers relatifs, alors $q(mx_0 - ny_0) = np$. On en déduit que l'entier q divise l'entier np . Puisque d'autre part, les entiers q et p sont premiers entre eux, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que l'entier q divise l'entier n .

3) a) Les entiers n et m sont premiers entre eux. D'après le théorème de BÉZOUT, il existe deux entiers relatifs u' et v' tels que $nu' + mv' = 1$ ou encore tel que $qu' + mv' = 1$. Si on pose $u = u'$ et $v = -v'$, u et v sont deux entiers relatifs tels que $nu - mv = 1$ ou encore $qu - mv = 1$.

b) D'après la question 2)a), $M(x_0, y_0)$ est un point de Δ à coordonnées entières si et seulement si $q(mx_0 - ny_0) = np$. Puisque q n'est pas nul,

$$q(mx_0 - ny_0) = np \Leftrightarrow q(mx_0 - ny_0) = qrp \Leftrightarrow mx_0 - ny_0 = rp.$$

Mais si on multiplie les deux membres de l'égalité $nu - mv = 1$ par rp , on obtient

$$rp = m(-vrp) - n(-urp).$$

Donc, le couple $(x_0, y_0) = (-vrp, -urp)$ est solution du problème.

En résumé, il existe sur Δ un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs si et seulement si q divise n .

4) Ici, les fractions sont bien sous forme irréductible puis $m = 3$, $n = 8$, $p = 7$ et $q = 4$. Puisque 4 divise 8, Δ possède un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5) a) Si Q divise N , que l'algorithme affiche un couple $\left(X, \frac{M}{N}N + \frac{p}{q}\right)$ ou un couple $\left(-X, -\frac{M}{N}X + \frac{p}{Q}\right)$, il s'agit toujours d'un couple d'entiers relatifs qui sont les coordonnées d'un point de Δ . Dans un cas, l'abscisse du point est positive et dans l'autre l'abscisse du point est négative.

Puisque Q divise N , il existe au moins un point à coordonnées entières sur Δ . Celui-ci sera atteint en un temps fini (X prend la valeur $X + 1$) et donc l'algorithme se termine.

Si Q ne divise pas N , l'algorithme se termine immédiatement et en particulier se termine.

On a montré que, dans tous les cas, l'algorithme se termine.

b) Quand Q divise N , l'algorithme affiche le point de Δ à coordonnées entières dont la valeur absolue de l'abscisse est minimum et si Q ne divise pas N , l'algorithme affiche « Pas de solution ». De manière générale, l'algorithme teste si la droite est rationnelle ou pas.

EXERCICE 4

1) Dans le triangle TEA rectangle en E, on a

$$\tan(\alpha) = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}.$$

De même, dans le triangle TEB rectangle en E, on a

$$\tan(\beta) = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}.$$

2) La fonction \tan est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, pour x réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La dérivée de la fonction tangente est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc la fonction tangente est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

3)

$$\begin{aligned} \tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{25}{x} \times \frac{30,6}{x}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} \\ &= \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765} = \frac{5,6x}{x^2 + 765} \end{aligned}$$

4) Pour $x \in]0, 50]$, $f(x) = \frac{x^2 + 765}{x}$ puis $\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + 765}$ et enfin

$$\tan(\gamma) = 5,6 \times \frac{x}{x^2 + 765} = 5,6 \times \frac{1}{f(x)} = \frac{5,6}{f(x)}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto \frac{5,6}{t}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (et que pour tout x de $]0, 50]$, $f(x) > 0$), $\tan(\gamma)$ est maximum si et seulement si $f(x)$ est minimum.

La fonction f est dérivable sur $]0, 50]$ et pour tout réel x de $]0, 50]$,

$$f'(x) = 1 + 765 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2} = \frac{(x - \sqrt{765})(x + \sqrt{765})}{x^2}.$$

Sur $]0, 50]$, on a $x^2 > 0$ et $x + \sqrt{765} > 0$. Sur $]0, 50]$, $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{765}$ avec $\sqrt{765} = 27,6\dots$ et donc $\sqrt{765} \in]0, 50]$. Par suite, la fonction f est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{765}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{765}, 50]$. La fonction f admet un minimum en $x_0 = \sqrt{765}$.

L'angle \widehat{ATB} est donc maximum pour $ET = \sqrt{765}$ et donc pour maximiser ses chances, le joueur doit se placer à 28 mètres, arrondi au mètre, de la ligne d'essai. Dans ce cas, $\tan(\gamma) = \frac{5,6\sqrt{765}}{1530}$ et donc l'angle maximum mesure 0,1 radian arrondi à 0,01 radian (fourni par la calculatrice) soit environ 6° .