Centres étrangers. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) Notons X la variable aléatoire égale à la masse, en grammes, d'une baguette de pain. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 187)$. La calculatrice fournit $P(X \geqslant 187) = 0,903\ldots$ En particulier, $P(X \geqslant 187) \geqslant 0,9$.

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est vraie.}}$

2) Pour x réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = x - \cos x$. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

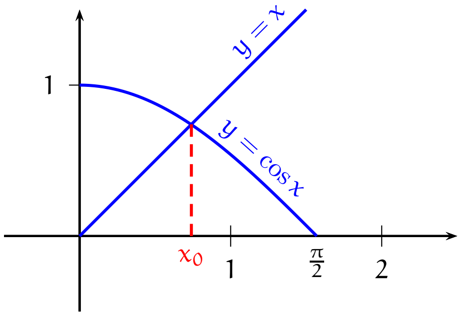
$$f'(x) = 1 - \sin x.$$

La fonction f' est donc strictement positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 et une seule dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\text{L'affirmation 2 est vraie.}}$

On note que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\cos(x) = x$. Le graphique suivant montre alors l'existence et l'unicité de la solution.



3) Soient $M(1 + 2t, 2 - 3t, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_1$ et $M'(-5t' + 3, 2t', t' + 4)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_2$.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 + 2t = -5t' + 3 \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = t' + 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 4t - 4 \\ 1 + 2t = -5(4t - 4) + 3 \\ 2 - 3t = 2(4t - 4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 4t - 4 \\ 22t = 22 \\ -11t = -10 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 4t - 4 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{10}{11} \end{array}\right..$$

Le système précédent n'a pas de solution et donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas sécantes.

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est fausse.}}$

4) Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2, -3, 4)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, 2, 1)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + 4 \times 1 = 2 - 6 + 4 = 0.$$

$\overrightarrow{u}$ est orthogonale à $\overrightarrow{n}$ et donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est vraie.}}$

EXERCICE 2

Partie A. Etude de quelques exemples

1) a) Pour tout réel x de $[0,1]$, posons $f(x) = k$ où k est un réel strictement positif.

$$A_1 = \int_0^a k\ dx = k(a-0) = ka \quad \text{et} \quad A_2 = \int_a^1 k\ dx = k(1-a).$$

Donc,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow ka = k(1-a) \Leftrightarrow a = 1-a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

b) Pour tout réel x de $[0,1]$, posons $f(x) = x$.

$$A_1 = \int_0^a x\ dx = k(a-0) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad A_2 = \int_a^1 x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1-a^2}{2}.$$

Donc,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{1-a^2}{2} \Leftrightarrow a^2 = 1-a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (car } a > 0).$$

2) a) Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0,1]$, $A_1 = \displaystyle\int_0^a f(x)\ dx$ et $A_2 = \displaystyle\int_a^1 f(x)\ dx$

b) Soit a un réel de $[0,1]$.

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \int_0^a f(x)\ dx = \int_a^1 f(x)\ dx \Leftrightarrow F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \Leftrightarrow 2F(a) = F(0) + F(1) \Leftrightarrow F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2}.$$

Ainsi, si a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$. Réciproquement, si $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$, alors a est satisfait la condiotn (E) si $a \in [0,1]$ et ne satisfait pas la condition (E) si $a \notin [0,1]$.

3) a) On peut prendre pour F la fonction f. D'après la question précédente,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow e^a = \frac{e^0 + e^1}{2} \Leftrightarrow e^a = \frac{1+e}{2} \Leftrightarrow a = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

On note que $\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right) = 0,6\ldots$ et donc $\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right) \in [0,1]$.

b) Une primitive de la fonction f sur $[0,1]$ est la fonction $F\ :\ x \mapsto -\dfrac{1}{x+2}$.

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow -\frac{1}{a+2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{0+2} - \frac{1}{1+2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{5}{12} \\ &\Leftrightarrow a+2 = \frac{12}{5} \Leftrightarrow a = \frac{12}{5} - 2 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

De plus, $a \in [0,1]$ et donc a convient.

Partie B. Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

1) Une primitive de la fonction f sur $[0,1]$ est la fonction $F\ :\ x \mapsto 4x - x^3$.

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow 4a - a^3 = \frac{1}{2}(0+4-1) \Leftrightarrow 4a = a^3 + \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Donc si a satisfait la condition (E), a est solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.

2) a) $u_1 = \dfrac{u_0^3}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{8}$.

b) La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout réel x de $[0,1]$, $g'(x) = \dfrac{3x^2}{4}$. La fonction g' est positive sur $[0,1]$ et donc la fonction g est croissante sur $[0,1]$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{3}{8}$. Donc, $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Puisque la fonction g est croissante sur $[0,1]$, on en déduit que $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(1)$ ou encore que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{5}{8}$. En particulier, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

d) En particulier, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n^3}{4} + \dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{\ell^3}{4} + \dfrac{3}{8}$. Ainsi, ℓ est un réel de $[0,1]$ solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.

D'après un résultat admis par l'énoncé, a est l'unique réel de $[0,1]$ solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et donc $\ell = a$.

e) La calculatrice fournit

$$u_{10} = 0,38980784 \text{ à } 10^{-8} \text{ près par défaut.}$$

EXERCICE 3

Partie A. Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1) a) • 700 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.

• Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne accepte de répondre au sondage » avec une probabilité $p = 0,6$ et « la personne n'accepte pas de répondre au sondage » avec une probabilité $1 - p = 0,4$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

b) La calculatrice fournit $P(X \geqslant 400) = 0,942\ldots$ La meilleure valeur approchée de $P(X \geqslant 400)$ est $0,94$.

2) Notons n le nombre de personnes interrogées, n étant un entier supérieur ou égal à 400. Notons X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et $p = 0,6$. La probabilité que le nombre de personnés acceptant de répondre au sondage soit supérieur ou égal à 400 est $P(X_n \geqslant 400)$. La suite $(P(X_n \geqslant 400))_{n \geqslant 400}$ est bien sûr croissante.

La calculatrice fournit le tableau de valeurs suivant

n	$P(X_n \geqslant 400)$
700	$0,94\ldots$
699	$0,93\ldots$
698	$0,93\ldots$
697	$0,92\ldots$
696	$0,91\ldots$
695	$0,91\ldots$
694	$0,90\ldots$
693	$0,89\ldots$

La valeur minimum de l'entier n cherchée est 694.

Partie B

1) La fréquence observée est $f = 0,29$. On note $n \geqslant 50$ et en particulier $n \geqslant 30$ puis $nf \geqslant 0,29 \times 50$ ou encore $nf \geqslant 14,5$ et en particulier $nf \geqslant 5$ puis $n(1-f) \geqslant 0,71 \times 50$ et en particulier $n(1-f) \geqslant 5$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

2) L'amplitude de cet intervalle est $\left(0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \frac{1}{0,04} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 50 \Leftrightarrow n \geqslant 2500.$$

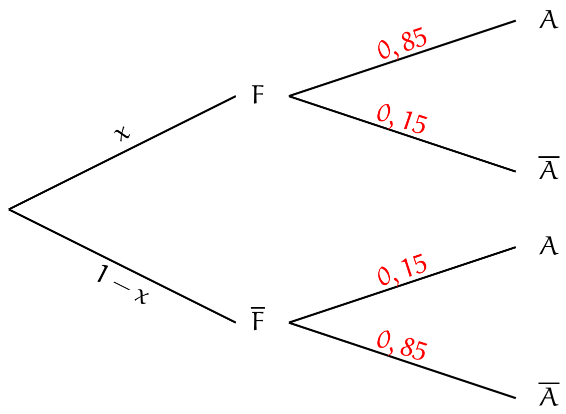
La valeur minimale cherchée est 2500.

Partie C

1) $P_F(A)$ est la probabilité que la personne affirme qu'elle est favaorable au projet sachant qu'elle est favorable au projet.

D'après l'énoncé, parmi les personnes favorables, il y en a 15% de non sincères qui vont donc affirmer qu'elles ne sont pas favorables au projet et 85% de sincères qui vont donc affirmer qu'elles sont favorables au projet. Donc, $P_F(A) = 0,85$ et de même, $P_{\overline{F}}(A) = 0,15$.

2) a) Arbre complété.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F) \times P_F(A) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(A) = P(A)$$

et donc

$$0,85x + 0,15(1 - x) = 0,29.$$

3) $0,85x + 0,15(1 - x) = 0,29 \Leftrightarrow 0,7x = 0,14 \Leftrightarrow x = \dfrac{0,14}{0,7} \Leftrightarrow x = 0,2.$
Donc, 20% des personnes ayant accepté de répondre au sondage sont réellement favorables au projet.

EXERCICE 4

Partie A

1) $z_1 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)e^{\frac{2i\pi}{6}} = \dfrac{7}{6}e^{\frac{i\pi}{3}} = \dfrac{7}{6}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{7}{12}+i\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

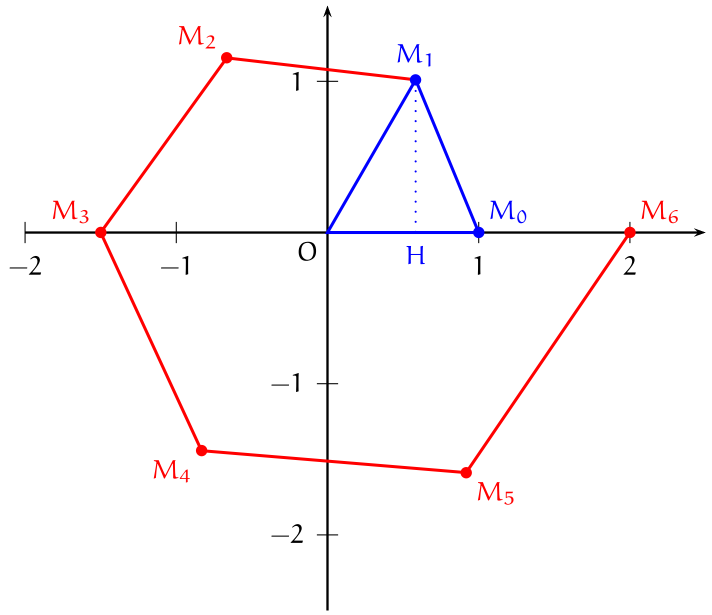
2) $z_0 = \left(1+\dfrac{0}{6}\right)e^{0} = 1$ et $z_6 = \left(1+\dfrac{6}{6}\right)e^{2i\pi} = 2\left(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)\right) = 2$. En particulier, z_0 et z_6 sont des entiers.

3) Notons H le pied de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1. On a $z_H = x_{M_1} = \mathrm{Re}\,(z_1) = \dfrac{7}{12}$ et donc

$$HM_1 = |z_1 - z_H| = \left|\frac{7}{12}+i\frac{7\sqrt{3}}{12}-\frac{7}{12}\right| = \left|i\frac{7\sqrt{3}}{12}\right| = \frac{7\sqrt{3}}{12}|i| = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors

$$\frac{OM_0 \times HM_1}{2} = \frac{1\times\dfrac{7\sqrt{3}}{12}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}.$$



Partie B

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Puisque $1+\dfrac{k}{n} > 0$,

$$OM_k = |z_k| = \left|\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = \left(1+\frac{k}{n}\right)\left|e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = 1+\frac{k}{n}.$$

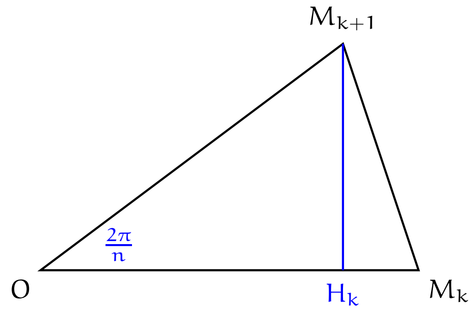
2) Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

$$\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_k}\right) = \arg\left(z_k\right) = \arg\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \frac{2k\pi}{n}\quad[2\pi].$$

et donc aussi $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\quad[2\pi]$. Par suite, d'après la relation de CHASLES,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right) &= \left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_k}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)\\ &= -\frac{2k\pi}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2(k+1-k)\pi}{n}\\ &= \frac{2\pi}{n}\quad[2\pi].\end{aligned}$$

3) Soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Notons H_k le pied de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.



D'après la question précédente, on a $M_k\widehat{OM}_{k+1} = \dfrac{2\pi}{n}$ puis

$$\frac{H_kM_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin\left(M_k\widehat{OM}_{k+1}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

et donc, d'après la question 1),

$$H_kM_{k+1} = OM_{k+1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left(1+\frac{k+1}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

4) Tableau complété.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,847

5) Algorithme complété.

Variables :	A est un nombre réel k est un entier n est un entier

Traitement :	n prend la valeur 2
	A prend la valeur 0
	Tant que $A < 7,2$
	    n prend la valeur $n+1$
	    A prend la valeur 0
	    Pour k allant de 0 à $n-1$
	        A prend la valeur $A+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
	    Fin Pour
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher n

