

Centres étrangers. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) Notons X la variable aléatoire égale à la masse, en grammes, d'une baguette de pain. La probabilité demandée est $P(X \geq 187)$. La calculatrice fournit $P(X \geq 187) = 0,903\dots$. En particulier, $P(X \geq 187) \geq 0,9$.

L'affirmation 1 est vraie.

2) Pour x réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = x - \cos x$. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

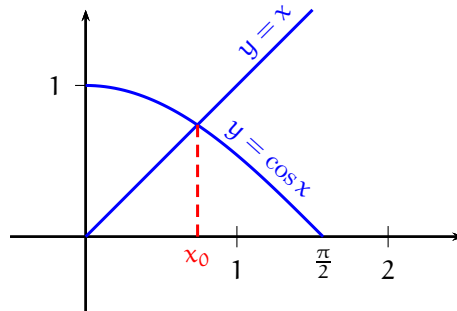
$$f'(x) = 1 - \sin x.$$

La fonction f' est donc strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 et une seule dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

L'affirmation 2 est vraie.

On note que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\cos(x) = x$. Le graphique suivant montre alors l'existence et l'unicité de la solution.



3) Soient $M(1 + 2t, 2 - 3t, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de \mathcal{D}_1 et $M'(-5t' + 3, 2t', t' + 4)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de \mathcal{D}_2 .

$$\begin{aligned}
 M = M' &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = -5t' + 3 \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = t' + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ 1 + 2t = -5(4t - 4) + 3 \\ 2 - 3t = 2(4t - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ 22t = 22 \\ -11t = -10 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ t = 1 \\ t = \frac{10}{11} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Le système précédent n'a pas de solution et donc les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas sécantes.

L'affirmation 3 est fausse.

4) Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}_1 est le vecteur \vec{u} de coordonnées $(2, -3, 4)$ et un vecteur normal au plan \mathcal{P} est le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1, 2, 1)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + 4 \times 1 = 2 - 6 + 4 = 0.$$

\vec{u} est orthogonale à \vec{n} et donc la droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P}

L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2

Partie A. Etude de quelques exemples

1) a) Pour tout réel x de $[0, 1]$, posons $f(x) = k$ où k est un réel strictement positif.

$$A_1 = \int_0^a k \, dx = k(a - 0) = ka \quad \text{et} \quad A_2 = \int_a^1 k \, dx = k(1 - a).$$

Donc,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow ka = k(1 - a) \Leftrightarrow a = 1 - a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

b) Pour tout réel x de $[0, 1]$, posons $f(x) = x$.

$$A_1 = \int_0^a x \, dx = k(a - 0) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad A_2 = \int_a^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1 - a^2}{2}.$$

Donc,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{1 - a^2}{2} \Leftrightarrow a^2 = 1 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{car } a > 0).$$

2) a) Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0, 1]$, $A_1 = \int_0^a f(x) \, dx$ et $A_2 = \int_a^1 f(x) \, dx$

b) Soit a un réel de $[0, 1]$.

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \int_0^a f(x) \, dx = \int_a^1 f(x) \, dx \Leftrightarrow F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \Leftrightarrow 2F(a) = F(0) + F(1) \Leftrightarrow F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}.$$

Ainsi, si a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$. Réciproquement, si $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$, alors a est satisfait la condition (E) si $a \in [0, 1]$ et ne satisfait pas la condition (E) si $a \notin [0, 1]$.

3) a) On peut prendre pour F la fonction f . D'après la question précédente,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow e^a = \frac{e^0 + e^1}{2} \Leftrightarrow e^a = \frac{1 + e}{2} \Leftrightarrow a = \ln \left(\frac{1 + e}{2} \right).$$

On note que $\ln \left(\frac{1 + e}{2} \right) = 0,6\dots$ et donc $\ln \left(\frac{1 + e}{2} \right) \in [0, 1]$.

b) Une primitive de la fonction f sur $[0, 1]$ est la fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{x+2}$.

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow -\frac{1}{a+2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{0+2} - \frac{1}{1+2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{5}{12} \\ &\Leftrightarrow a+2 = \frac{12}{5} \Leftrightarrow a = \frac{12}{5} - 2 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

De plus, $a \in [0, 1]$ et donc a convient.

Partie B. Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

1) Une primitive de la fonction f sur $[0, 1]$ est la fonction $F : x \mapsto 4x - x^3$.

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow 4a - a^3 = \frac{1}{2}(0 + 4 - 1) \Leftrightarrow 4a = a^3 + \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Donc si a satisfait la condition (E), a est solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.

2) a) $u_1 = \frac{u_0^3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$.

b) La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, $g'(x) = \frac{3x^2}{4}$. La fonction g' est positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction g est croissante sur $[0, 1]$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

- $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{3}{8}$. Donc, $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Puisque la fonction g est croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$ ou encore que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{5}{8}$. En particulier, on a $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

d) En particulier, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a alors $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^3}{4} + \frac{3}{8} \right) = \frac{\ell^3}{4} + \frac{3}{8}$. Ainsi, ℓ est un réel de $[0, 1]$ solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.

D'après un résultat admis par l'énoncé, α est l'unique réel de $[0, 1]$ solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$ et donc $\ell = \alpha$.

e) La calculatrice fournit

$$u_{10} = 0,38980784 \text{ à } 10^{-8} \text{ près par défaut.}$$

EXERCICE 3

Partie A. Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1) a) • 700 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.

- Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne accepte de répondre au sondage » avec une probabilité $p = 0,6$ et « la personne n'accepte pas de répondre au sondage » avec une probabilité $1 - p = 0,4$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

b) La calculatrice fournit $P(X \geq 400) = 0,942\dots$. La meilleure valeur approchée de $P(X \geq 400)$ est $0,94$.

2) Notons n le nombre de personnes interrogées, n étant un entier supérieur ou égal à 400. Notons X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et $p = 0,6$. La probabilité que le nombre de personnes acceptant de répondre au sondage soit supérieur ou égal à 400 est $P(X_n \geq 400)$. La suite $(P(X_n \geq 400))_{n \geq 400}$ est bien sûr croissante.

La calculatrice fournit le tableau de valeurs suivant

n	$P(X_n \geq 400)$
700	0,94...
699	0,93...
698	0,93...
697	0,92...
696	0,91...
695	0,91...
694	0,90...
693	0,89...

La valeur minimum de l'entier n cherchée est 694.

Partie B

1) La fréquence observée est $f = 0,29$. On note $n \geq 50$ et en particulier $n \geq 30$ puis $nf \geq 0,29 \times 50$ ou encore $nf \geq 14,5$ et en particulier $nf \geq 5$ puis $n(1 - f) \geq 0,71 \times 50$ et en particulier $n(1 - f) \geq 5$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

2) L'amplitude de cet intervalle est $\left(0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \left(0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{0,04} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 50 \Leftrightarrow n \geq 2500.$$

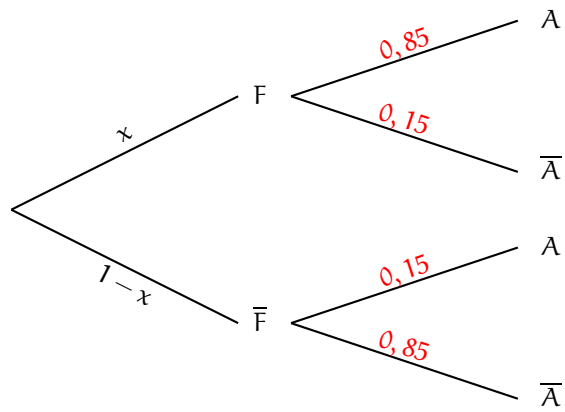
La valeur minimale cherchée est 2500.

Partie C

1) $P_F(A)$ est la probabilité que la personne affirme qu'elle est favorable au projet sachant qu'elle est favorable au projet.

D'après l'énoncé, parmi les personnes favorables, il y en a 15% de non sincères qui vont donc affirmer qu'elles ne sont pas favorables au projet et 85% de sincères qui vont donc affirmer qu'elles sont favorables au projet. Donc, $P_F(A) = 0,85$ et de même, $P_{\bar{F}}(A) = 0,15$.

2) a) **Arbre complété.**



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F) \times P_F(A) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(A) = P(A)$$

et donc

$$0,85x + 0,15(1-x) = 0,29.$$

$$\mathbf{3)} \quad 0,85x + 0,15(1-x) = 0,29 \Leftrightarrow 0,7x = 0,14 \Leftrightarrow x = \frac{0,14}{0,7} \Leftrightarrow x = 0,2.$$

Donc, 20% des personnes ayant accepté de répondre au sondage sont réellement favorables au projet.

EXERCICE 4

Partie A

$$1) z_1 = \left(1 + \frac{1}{6}\right) e^{\frac{2i\pi}{6}} = \frac{7}{6} e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

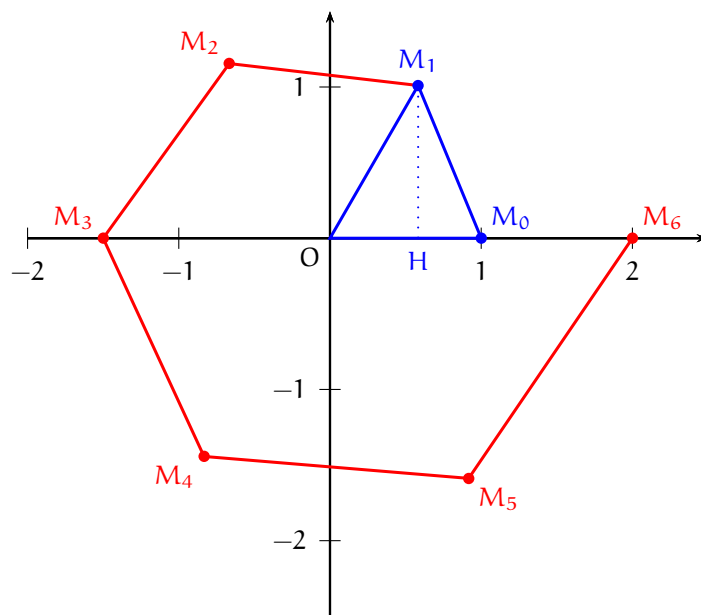
$$2) z_0 = \left(1 + \frac{0}{6}\right) e^0 = 1 \text{ et } z_6 = \left(1 + \frac{6}{6}\right) e^{2i\pi} = 2(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 2. \text{ En particulier, } z_0 \text{ et } z_6 \text{ sont des entiers.}$$

3) Notons H le pied de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 . On a $z_H = x_{M_1} = \operatorname{Re}(z_1) = \frac{7}{12}$ et donc

$$HM_1 = |z_1 - z_H| = \left| \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12} - \frac{7}{12} \right| = \left| i\frac{7\sqrt{3}}{12} \right| = \frac{7\sqrt{3}}{12} |i| = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors

$$\frac{OM_0 \times HM_1}{2} = \frac{1 \times \frac{7\sqrt{3}}{12}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}.$$



Partie B

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Puisque $1 + \frac{k}{n} > 0$,

$$OM_k = |z_k| = \left| \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = 1 + \frac{k}{n}.$$

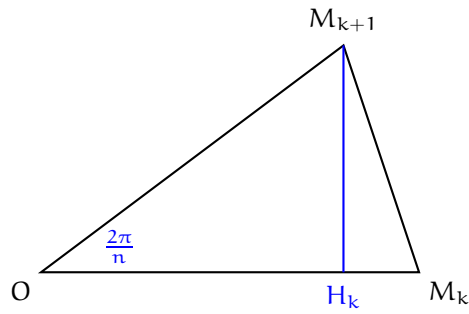
2) Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$.

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) = \arg(z_k) = \arg\left(\left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \frac{2k\pi}{n} \quad [2\pi].$$

et donc aussi $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \frac{2(k+1)\pi}{n} \quad [2\pi]$. Par suite, d'après la relation de CHASLES,

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) &= \left(\overrightarrow{OM_k}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) \\ &= -\frac{2k\pi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2(k+1-k)\pi}{n} \\ &= \frac{2\pi}{n} \quad [2\pi]. \end{aligned}$$

3) Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$. Notons H_k le pied de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} .



D'après la question précédente, on a $\widehat{M_kOM_{k+1}} = \frac{2\pi}{n}$ puis

$$\frac{H_k M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin(\widehat{M_kOM_{k+1}}) = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

et donc, d'après la question 1),

$$H_k M_{k+1} = OM_{k+1} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

4) **Tableau complété.**

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,847

5) **Algorithme complété.**

Variables :	A est un nombre réel k est un entier n est un entier
Traitement :	n prend la valeur 2 A prend la valeur 0 Tant que A < 7,2 n prend la valeur n + 1 A prend la valeur 0 Pour k allant de 0 à n - 1 A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ Fin Pour Fin Tant que
Sortie :	Afficher n