Centres étrangers. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) Notons X la variable aléatoire égale à la masse, en grammes, d'une baguette de pain. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 187)$. La calculatrice fournit $P(X \geqslant 187) = 0,903\ldots$ En particulier, $P(X \geqslant 187) \geqslant 0,9$.

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est vraie.}}$

2) Pour x réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f(x) = x - \cos x$. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

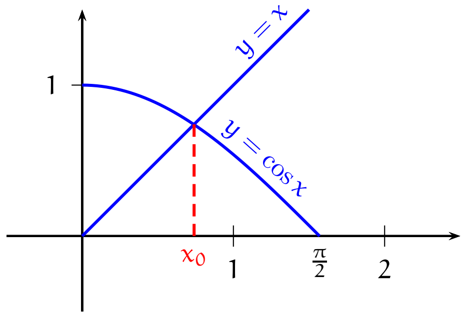
$$f'(x) = 1 - \sin x.$$

La fonction f' est donc strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 et une seule dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\text{L'affirmation 2 est vraie.}}$

On note que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\cos(x) = x$. Le graphique suivant montre alors l'existence et l'unicité de la solution.



3) Soient $M(1+2t, 2-3t, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_1$ et $M'(-5t'+3, 2t', t'+4)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_2$.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+2t = -5t'+3 \\ 2-3t = 2t' \\ 4t = t'+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 4t-4 \\ 1+2t = -5(4t-4)+3 \\ 2-3t = 2(4t-4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 4t-4 \\ 22t = 22 \\ -11t = -10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 4t-4 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{10}{11} \end{array}\right. .$$

Le système précédent n'a pas de solution et donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas sécantes.

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est fausse.}}$

4) Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2, -3, 4)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, 2, 1)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + 4 \times 1 = 2 - 6 + 4 = 0.$$

$\overrightarrow{u}$ est orthogonale à $\overrightarrow{n}$ et donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est vraie.}}$

EXERCICE 2

Partie A. Etude de quelques exemples

1) a) Pour tout réel x de $[0,1]$, posons $f(x) = k$ où k est un réel strictement positif.

$$A_1 = \int_0^a k\ dx = k(a-0) = ka \quad \text{et} \quad A_2 = \int_a^1 k\ dx = k(1-a).$$

Donc,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow ka = k(1-a) \Leftrightarrow a = 1-a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

b) Pour tout réel x de $[0,1]$, posons $f(x) = x$.

$$A_1 = \int_0^a x\ dx = k(a-0) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad A_2 = \int_a^1 x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1-a^2}{2}.$$

Donc,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{1-a^2}{2} \Leftrightarrow a^2 = 1-a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\text{car } a > 0).$$

2) a) Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0,1]$, $A_1 = \displaystyle\int_0^a f(x)\ dx$ et $A_2 = \displaystyle\int_a^1 f(x)\ dx$

b) Soit a un réel de $[0,1]$.

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \int_0^a f(x)\ dx = \int_a^1 f(x)\ dx \Leftrightarrow F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \Leftrightarrow 2F(a) = F(0) + F(1) \Leftrightarrow F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2}.$$

Ainsi, si a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$. Réciproquement, si $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$, alors a est satisfait la condiotn (E) si $a \in [0,1]$ et ne satisfait pas la condition (E) si $a \notin [0,1]$.

3) a) On peut prendre pour F la fonction f. D'après la question précédente,

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow e^a = \frac{e^0 + e^1}{2} \Leftrightarrow e^a = \frac{1+e}{2} \Leftrightarrow a = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

On note que $\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right) = 0,6\ldots$ et donc $\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right) \in [0,1]$.

b) Une primitive de la fonction f sur $[0,1]$ est la fonction $F\ :\ x \mapsto -\dfrac{1}{x+2}$.

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow -\frac{1}{a+2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{0+2} - \frac{1}{1+2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{5}{12} \\ &\Leftrightarrow a+2 = \frac{12}{5} \Leftrightarrow a = \frac{12}{5} - 2 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

De plus, $a \in [0,1]$ et donc a convient.

Partie B. Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

1) Une primitive de la fonction f sur $[0,1]$ est la fonction $F\ :\ x \mapsto 4x - x^3$.

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 \Leftrightarrow 4a - a^3 = \frac{1}{2}(0+4-1) &\Leftrightarrow 4a = a^3 + \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Donc si a satisfait la condition (E), a est solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.

2) a) $u_1 = \dfrac{u_0^3}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{8}$.

b) La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout réel x de $[0,1]$, $g'(x) = \dfrac{3x^2}{4}$. La fonction g' est positive sur $[0,1]$ et donc la fonction g est croissante sur $[0,1]$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{3}{8}$. Donc, $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Puisque la fonction g est croissante sur $[0,1]$, on en déduit que $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(1)$ ou encore que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{5}{8}$. En particulier, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

d) En particulier, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a alors $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n^3}{4} + \dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{\ell^3}{4} + \dfrac{3}{8}$. Ainsi, ℓ est un réel de $[0,1]$ solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.

D'après un résultat admis par l'énoncé, a est l'unique réel de $[0,1]$ solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et donc $\ell = a$.

e) La calculatrice fournit

$$u_{10} = 0,38980784 \text{ à } 10^{-8} \text{ près par défaut.}$$

EXERCICE 3

Partie A. Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1) a) • 700 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.
• Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne accepte de répondre au sondage » avec une probabilité $p = 0,6$ et « la personne n'accepte pas de répondre au sondage » avec une probabilité $1 - p = 0,4$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

b) La calculatrice fournit $P(X \geqslant 400) = 0,942\ldots$ La meilleure valeur approchée de $P(X \geqslant 400)$ est $0,94$.

2) Notons n le nombre de personnes interrogées, n étant un entier supérieur ou égal à 400. Notons X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et $p = 0,6$. La probabilité que le nombre de personnés acceptant de répondre au sondage soit supérieur ou égal à 400 est $P(X_n \geqslant 400)$. La suite $(P(X_n \geqslant 400))_{n \geqslant 400}$ est bien sûr croissante.

La calculatrice fournit le tableau de valeurs suivant

n	$P(X_n \geqslant 400)$
700	$0,94\ldots$
699	$0,93\ldots$
698	$0,93\ldots$
697	$0,92\ldots$
696	$0,91\ldots$
695	$0,91\ldots$
694	$0,90\ldots$
693	$0,89\ldots$

La valeur minimum de l'entier n cherchée est 694.

Partie B

1) La fréquence observée est $f = 0,29$. On note $n \geqslant 50$ et en particulier $n \geqslant 30$ puis $nf \geqslant 0,29 \times 50$ ou encore $nf \geqslant 14,5$ et en particulier $nf \geqslant 5$ puis $n(1-f) \geqslant 0,71 \times 50$ et en particulier $n(1-f) \geqslant 5$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

2) L'amplitude de cet intervalle est $\left(0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

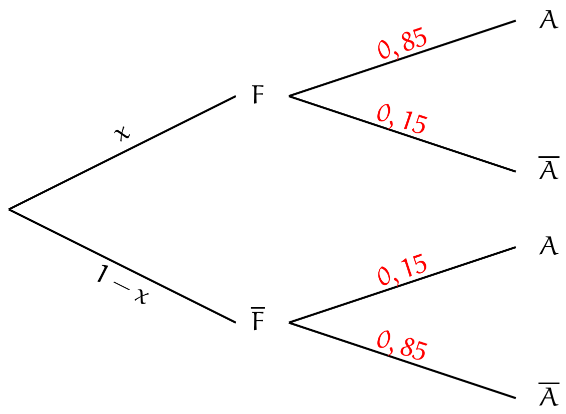
$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \frac{1}{0,04} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 50 \Leftrightarrow n \geqslant 2500.$$

La valeur minimale cherchée est 2500.

Partie C

1) $P_F(A)$ est la probabilité que la personne affirme qu'elle est favaorable au projet sachant qu'elle est favorable au projet.
D'après l'énoncé, parmi les personnes favorables, il y en a 15% de non sincères qui vont donc affirmer qu'elles ne sont pas favorables au projet et 85% de sincères qui vont donc affirmer qu'elles sont favorables au projet. Donc, $P_F(A) = 0,85$ et de même, $P_{\overline{F}}(A) = 0,15$.

2) a) Arbre complété.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F) \times P_F(A) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(A) = P(A)$$

et donc

$$0,85x + 0,15(1-x) = 0,29.$$

3) $0,85x + 0,15(1-x) = 0,29 \Leftrightarrow 0,7x = 0,14 \Leftrightarrow x = \dfrac{0,14}{0,7} \Leftrightarrow x = 0,2.$
Donc, 20% des personnes ayant accepté de répondre au sondage sont réellement favorables au projet.

EXERCICE 4

Partie A. Chiffrement de Hill

• Le bloc LL correspond à $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 105 \end{pmatrix}$. Donc, $y_1 = 51$ et $y_2 = 105$.
$51 = 1 \times 26 + 25$ avec $0 \leqslant 25 \leqslant 25$. Donc $r_1 = 25$. De même, $105 = 4 \times 26 + 1$ avec $0 \leqslant 1 \leqslant 25$. Donc, $r_2 = 1$.
$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ correspond au bloc ZB.

• Le bloc LL correspond à $X = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \end{pmatrix}$. Donc, $y_1 = 77$ et $y_2 = 154$.
$77 = 2 \times 26 + 25$ avec $0 \leqslant 25 \leqslant 25$. Donc $r_1 = 25$. De même, $154 = 5 \times 26 + 24$ avec $0 \leqslant 24 \leqslant 25$. Donc, $r_2 = 24$.
$\begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix}$ correspond au bloc ZY.

Finalement, le mot HILL se code en le mot ZBZY.

Partie B. Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1) Soit a un entier relatif premier à 26. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ua + 26v = 1$. Mais alors, u est un entier relatif tel que $au \equiv 1$ [26].

2) a) Tableau complété.

u	0	1	2	3	4	5
r	0	21	16	11	6	1

b) et donc $5 \times 21 \equiv 1$ [26].

3) a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 24 \\ 84 & 63 \end{pmatrix}$$

et donc

$$12A - A^2 = 12\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 39 & 24 \\ 84 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

b) Ainsi, $12A - A^2 = 21I$ ou encore $(12I - A)A = 21I$. La matrice $B = 12I - A$ convient avec

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) $AX = Y \Rightarrow BAX = BY \Rightarrow 21IX = BY \Rightarrow 21X = BY$.

Partie C. Déchiffrement

1) Puisque $21X = BY$, on a $21\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_2 + 5y_2 \end{array}\right.$.

2) D'après la question B.5.b), $5 \times 21 \equiv 1$ [26]. Or,

$$\left\{\begin{array}{l} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_2 + 5y_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5 \times 21x_1 = 35y_1 - 10y_2 \\ 5 \times 21x_2 = -35y_2 + 25y_2 \end{array}\right..$$

Puisque $5 \times 21 \equiv 1$ [26], $35 \equiv 9$ [26], $-10 \equiv 16$ [26], $-35 \equiv 17$ [26], $25 \equiv 25$ [26], $y_1 \equiv r_1$ [26] et $y_2 \equiv r_2$ [26], on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \\ x_2 \equiv 17r_2 + 25r_2 \end{array}\right..$$

3) • Le bloc VL correspond à $r_1 = 21$ et $r_2 = 11$. $9r_1 + 16r_2 = 365$ puis $x_1 \equiv 1$ [26] avec $0 \leqslant 1 \leqslant 25$ et donc $x_1 = 1$. De même, $17r_1 + 25r_2 = 632$ puis $x_2 \equiv 8$ [26] avec $0 \leqslant 8 \leqslant 25$ et donc $x_2 = 8$.
$x_1 = 1$ et $x_2 = 8$ correspond au bloc BI.

• Le bloc UP correspond à $r_1 = 20$ et $r_2 = 15$. $9r_1 + 16r_2 = 420$ puis $x_1 \equiv 4$ [26] avec $0 \leqslant 4 \leqslant 25$ et donc $x_1 = 4$. De même, $17r_1 + 25r_2 = 715$ puis $x_2 \equiv 13$ [26] avec $0 \leqslant 13 \leqslant 25$ et donc $x_2 = 13$.
$x_1 = 4$ et $x_2 = 13$ correspond au bloc EN.

Le mot VLUP se décode en le mot BIEN.

