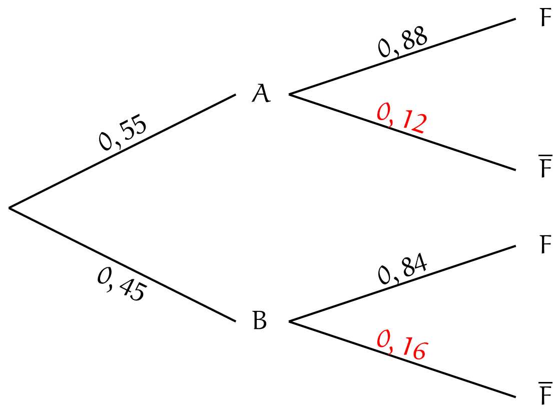
Asie. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

Notons A l'évènement « la fleur provient de la serre A », B l'évènement « la fleur provient de la serre B » et F l'évènement « la fleur donne un fruit ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(F)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(F) &= P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,484 + 0,378 \\ &= 0,862.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La proposition 1 est vraie.}}$$

La probabilité demandée est $P_F(A)$.

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0,55 \times 0,88}{0,862} = 0,561 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{\text{La proposition 2 est fausse.}}$$

Partie B

1) Puisque $237 = 250 - 13$ et $263 = 250 + 13$, les deux nombres 237 et 263 sont symétriques par rapport au nombre 250. Pour des raisons de symétrie,

$$P(237 \leqslant X \leqslant 263) = 1 - P(X \leqslant 237) - P(X \geqslant 263) = 1 - 2P(X \leqslant 237) = 1 - 2 \times 0,14 = 0,72.$$

2) a) On sait que Y suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b) $X \leqslant 237 \Leftrightarrow X - 250 \leqslant -13 \Leftrightarrow \dfrac{X-250}{\sigma} \leqslant -\dfrac{13}{\sigma} \Leftrightarrow Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}$. Les événements $X \leqslant 237$ et $Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}$ sont les mêmes et donc

$$P\left(Y \leqslant -\frac{13}{\sigma}\right) = P(X \leqslant 237) = 0,14.$$

c) La calculatrice fournit

$$P\left(Y \leqslant -\frac{13}{\sigma}\right) = 0,14 \Leftrightarrow -\frac{13}{\sigma} = -1,080\ldots \Leftrightarrow \sigma = 12,03\ldots$$

Donc, $\sigma = 12$ arrondi à l'unité.

3) a) La suite $(P(250 - n \leqslant X \leqslant 250 + n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. La calculatrice fournit

$$P(250 - 23 \leqslant X \leqslant 250 + 23) = 0,944\ldots < 0,95 \text{ et } P(250 - 24 \leqslant X \leqslant 250 + 24) = 0,954\ldots \geqslant 0,95.$$

La plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité qu'une barquette soit conforme, est supérieure ou égale à $0,95$, est $n = 24$.

b) La suite $(P(250 \leqslant X \leqslant m))_{m \geqslant 230}$ est croissante. La calculatrice fournit

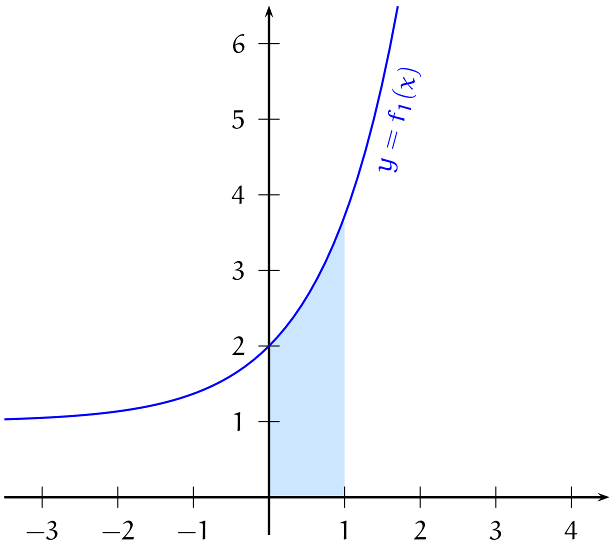
$$P(230 \leqslant X \leqslant 284) = 0,949\ldots < 0,95 \text{ et } P(230 \leqslant X \leqslant 285) = 0,950\ldots \geqslant 0,95.$$

La plus petite valeur de l'entier m pour laquelle $P(230 \leqslant X \leqslant m) \geqslant 0,95$ est $m = 285$.

EXERCICE 2

1) Pour tout réel x, $f_0(x) = 0$. Donc $I(0) = 0$.

2) a) Représentation graphique.



$I(1)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré en bleu.

b) $I(1) = \displaystyle\int_0^1 (e^x + 1)\,dx = [e^x + x]_0^1 = \left(e^1 + 1\right) - e^0 = e.$

$$\boxed{I(1) = e = 2,7 \text{ arrondi au dixième.}}$$

3) Soit a un réel de $[0, 1]$.

$$I(a) = \int_0^1 \left(ae^{ax} + a\right) dx = \left[e^{ax} + ax\right]_0^1 = \left(e^a + a\right) - e^0 = e^a + a - 1.$$

La fonction I est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel a de $[0, 1]$, $I'(a) = e^a + 1$. La fonction I' est strictement positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction I est strictement croissante sur $[0, 1]$.

La fonction I est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$. De plus, $I(0) = 0 < 2$ et $I(1) = e > 2$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel a_0 de $[0, 1]$ et un seul tel que $I\left(a_0\right) = 2$.

La calculatrice fournit $I(0,792) = 1,999\ldots < 2$ et $I(0,793) = 2,003\ldots > 2$. Donc, $I(0,792) < I\left(a_0\right) < I(0,793)$. Puisque la fonction I est strictement croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$\boxed{0,792 < a_0 < 0,793.}$$

EXERCICE 3

Partie A : Premier modèle - avec une suite

1) a) Pour tout entier naturel n, notons u_n la masse, exprimée en grammes, de bactéries dans la cuve le n-ème jour.

Puisqu'initialement, la cuve contient 1 kg ou encore 1000 g de bactéries, on a effectivement $u_0 = 1\ 000$.
Soit $n \geqslant 0$. La masse de bactéries l'année $n+1$ est obtenue en rajoutant à la masse de bactéries l'année n, c'est-à-dire u_n, 0,2 fois cette masse puis en soustrayant 100 g. Donc

$$u_{n+1} = u_n + 0,2u_n - 100 = 1,2u_n - 100.$$

b) 30 kg sont encore 30 000 g. La calculatrice fournit les valeurs suivantes :

n	u_n
0	1 000
1	1 100
2	1 220
3	1 364
4	1 536, 8
5	1 744, 2 ...
6	1 993, 0 ...
7	2 291, 6 ...
8	2 649, 9 ...
9	3 079, 9 ...
10	3 595, 9 ...
11	4 215, 0 ...
12	4 958, 1 ...
13	5 849, 7 ...
14	6 919, 6 ...
15	8 203, 5 ...
16	9 744, 2 ...
17	11 593, ...
18	13 812, ...
19	16 474, ...
20	19 669, ...
21	23 503, ...
22	28 103, ...
23	33 624, ...

Le jour n° 23 ou encore au bout de 23 jours, la masse de bactéries dépasse 30 kg.

c) Algorithme complété.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u < 30\ 000$ faire
	    u prend la valeur $1,2u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

- $u_0 = 1000$ et en particulier $u_0 \geqslant 1000$. L'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant 1000$. Alors $1,2u_n - 100 \geqslant 1,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} \geqslant 1100$ et en particulier, $u_{n+1} \geqslant 1000$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = 0,2u_n - 100.$$

Puisque $u_n \geqslant 1000$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 100$ et en particulier $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2u_n - 600 = 1,2\,(u_n - 500) = 1,2v_n.$$

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$.

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n,$$

puis que

$$u_n = v_n + 500 = 500 \times 1,2^n + 500.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 500 \times 1,2^n + 500.}$$

c) Puisque $1,2 > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,2^n = +\infty$ et on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Partie B : second modèle - avec une fonction

1) a) $f(0) = \dfrac{50}{1 + 49e^0} = \dfrac{50}{1 + 49} = 1$.

b) Soit t un réel positif. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $1 + 49e^{-0,2t} > 1$ puis $\dfrac{1}{1 + 49e^{-0,2t}} < 1$ puis $50 \times \dfrac{1}{1 + 49e^{-0,2t}} < 50 \times 1$ et donc $\dfrac{50}{1 + 49e^{-0,2t}} < 50$.

On a montré que pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.

c) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ et ne s'annulant pas sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = 50 \times \frac{-\left(1 + 49e^{-0,2t}\right)'}{(1 + 49e^{-0,2t})^2} = 50 \times \frac{-49 \times \left(-0,2e^{-0,2t}\right)}{(1 + 49e^{-0,2t})^2} = \frac{490e^{-0,2t}}{(1 + 49e^{-0,2t})^2}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,2t} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{50}{1 + 49 \times 0} = 50$.

2) La masse de bactéries est initialement de 1kg. Cette masse croît avec le temps, reste strictement inférieure à 50 kg et vaut environ 50 kg au bout d'une longue durée.

3) Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
f(t) > 30 &\Leftrightarrow \frac{50}{1+49e^{-0,2t}} > 30 \\
&\Leftrightarrow \frac{1+49e^{-0,2t}}{50} < \frac{1}{30} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow 1+49e^{-0,2t} < \frac{5}{3} \Leftrightarrow 49e^{-0,2t} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{-0,2t} < \frac{2}{147} \\
&\Leftrightarrow -0,2t < \ln\left(\frac{2}{147}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow t > -\frac{1}{0,2}\ln\left(\frac{2}{147}\right) \Leftrightarrow t > 5\ln\left(\frac{147}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow t > 21,4\ldots.
\end{aligned}$$

La masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

Partie C : un contrôle de qualité

Ici, $n = 200$ et on suppose que $p = 0,8$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 160$ et $n(1-p) = 40$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\begin{aligned}
\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] &= \left[0,8 - 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}; 0,8 + 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}\right] \\
&= [0,744; 0,856]
\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{146}{200} = 0,73$. f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc l'affirmation de l'entreprise doit être remise en cause au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 4

1) *Propriétés des catadioptres.*

On considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}(a, b, c)$. Le rayon se réfléchit sur le plan (OAB) en une droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}(a, b, -c)$. Ce nouveau rayon se réfléchit sur le plan (OBC) en une droite d_3 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}(-a, b, -c)$. Ce dernier rayon se réfléchit sur le plan (OAC) en une droite d_4 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_4}(-a, -b, -c)$.

$\overrightarrow{v_4} = -\overrightarrow{v_1}$ et donc d_4 est parallèle à d_1. On a montré que si un rayon se réfléchit successivement sur les plans (OAB), (OBC) puis (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

2) *Réflexion de* d_2 *sur le plan* (OBC).

a) La droite d_2 est la droite passant par $I_1(2, 3, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}(-2, -1, 1)$. Une représentation paramétrique de d_2 est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Un vecteur normal au plan (OBC) est le vecteur $\overrightarrow{OA}$ de coordonnées $(1, 0, 0)$. Une équation cartésienne du plan (OBC) est $x = 0$.

c) $\left\{\begin{array}{l} x_{I_2} = 0 = 2 - 2 \times 1 \\ y_{I_2} = 2 = 3 - 1 \\ z_{I_2} = 1 \end{array}\right.$. Donc, le point I_2 appartient à la droite d_2. D'autre part, $x_{I_2} = 0$ et donc le point I_2 appartient au plan (OBC). Enfin, le vecteur $\overrightarrow{v_2}$ n'est pas orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{OA}$ car $x_{\overrightarrow{v_2}} \neq 0$ et donc la droite d_2 n'est pas parallèle au plan (OBC). Finalement, la droite d_2 et le plan (OBC) sont sécants en I_2.

3) *Réflexion de* d_3 *sur le plan* (OAC).

d_3 est la droite passant par $I_2(0, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}(2, -1, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite d_3 est $\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Une équation cartésienne du plan (OAC) est $y = 0$.

Soit $M(2t, 2 - t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d_3. $M \in (OAC) \Leftrightarrow 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Quand $t = 2$, on obtient le point de coordonnées $(4, 0, 3)$. Les coordonnées du point I_3 sont donc $(4, 0, 3)$.

Finalement, d_4 est la droite passant par $I_3(4, 0, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_4}(2, 1, 1)$.

4) *Étude du trajet de la lumière.*

a) d_1 est dirigée par $\overrightarrow{v_1}(-2, -1, -1)$ et d_2 est dirigée par $\overrightarrow{v_2}(-2, -1, 1)$. $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 \times (-1) = -2 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_2} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 \times 1 = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b) Les droites d_1 et d_2 définissent un unique plan à savoir le plan $\mathscr{P}$. Si les droites d_1, d_2 et d_3 sont contenues dans un même plan, alors la droite d_3 est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

La droite d_3 est dirigée par $\overrightarrow{v_3}(2, -1, 1)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_3} = 1 \times 2 + (-2) \times (-1) + 0 \times 1 = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et donc la droite d_3 n'est pas parallèle au $\mathscr{P}$. En particulier, la droite d_3 n'est pas contenue dans $\mathscr{P}$ et donc les droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan.

c) La droite d_4 est parallèle à la droite d_1 et donc au plan $\mathscr{P}$. Par suite, la droite d_4 est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le point $I_3(4, 0, 3)$ appartient au plan $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ est le plan passant par $I_1(2, 3, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(1, -2, 0)$. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $(x - 2) - 2(y - 3) = 0$ ou encore $x - 2y + 4 = 0$.

$$x_{I_4} - 2y_{I_4} + 4 = 4 - 0 + 4 = 8 \neq 0.$$

Le point I_4 n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$ et donc les droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.

