BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B.
Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

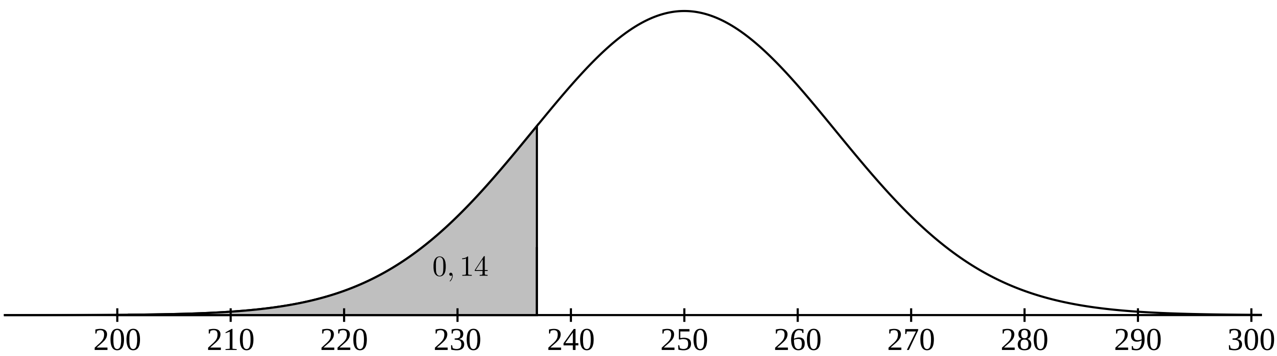
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1) On donne $P(X \leqslant 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2) On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

b) Démontrer que $P\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

c) En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3) Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n\ ;\ 250 + n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

EXERCICE 2 (3 points)

(commun à tous les candidats)

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = ae^{ax} + a.$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

1) On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.

2) On pose dans cette question $a = 1$. On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = e^x + 1.$$

a) Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.

b) Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.

3) Existe-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2 ? Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 3 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle - avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\ 000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1) a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n.

b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente. Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur $1\ 000$
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\ 000$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3) On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : second modèle - avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49e^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1) a) Calculer $f(0)$.

b) Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.

c) Étudier le sens de variation de la fonction f.

d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

3) En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.
L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.
L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de cryptage, dite « chiffrement de Hill », dans un cas particulier. Cette méthode nécessite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dont les coefficients sont des nombres entiers choisis entre 0 et 25, et tels que $ad - bc$ soit premier avec 26.
Cette matrice est connue seulement de l'émetteur et du destinataire.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : quelques résultats

1) On considère l'équation (E) : $9d - 26m = 1$, où d et m désignent deux entiers relatifs.

a) Donner une solution simple de cette équation, de sorte que d et m soient des nombres entiers compris entre 0 et 3.

b) Démontrer que le couple $(d\,;\,m)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si :

$$9(d-3) = 26(m-1).$$

c) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les nombres entiers relatifs de la forme :

$$\begin{cases} d = 26k + 3 \\ m = 9k + 1 \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

2) a) Soit n un nombre entier. Démontrer que si $n = 26k - 1$, avec k entier relatif, alors n et 26 sont premiers entre eux.

b) En déduire que les nombres $9d - 28$, avec $d = 26k + 3$ et $k \in \mathbb{Z}$, sont premiers avec 26.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
On utilisera le tableau suivant pour la correspondance entre les lettres et les nombres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Méthode de cryptage (pour un mot comportant un nombre pair de lettres)	**Exemple : avec le mot MATH**	
1. On regroupe les lettres par paires.	MA TH	
2. On remplace les lettres par les valeurs associées à l'aide du tableau précédent, et on place les couples de nombres obtenus dans des matrices colonne.	$C_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$
3. On multiplie les matrices colonne par la gauche par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$AC_1 = \begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix}$	$AC_2 = \begin{pmatrix} 199 \\ 154 \end{pmatrix}$
4. On remplace chaque coefficient des matrices colonne obtenues par leur reste dans la division euclidienne par 26.	$108 = 4 \times 26 + 4$ $84 = 3 \times 26 + 6$ On obtient : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$
5. On utilise le tableau de correspondance entre lettres et nombres pour obtenir le mot crypté.	EG RY	

1) En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH ». En détaillant les étapes pour le mot « ES », crypter le mot « ESPION ».

2) Méthode de décryptage

Notation : lorsqu'on manipule des matrices de nombres entiers relatifs, on peut utiliser la notation « $\equiv$ » pour parler de congruence coefficient par coefficient. Par exemple, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ modulo 26 car } 108 \equiv 4 \text{ modulo 26 et } 84 \equiv 6 \text{ modulo 26.}$$

Soient a, b, x, y, x' et y' des nombres entiers relatifs.
On sait que si $x \equiv x'$ modulo 26 et $y \equiv y'$ modulo 26 alors $ax + by \equiv ax' + by'$ modulo 26.
Ce résultat permet d'écrire que, si A est une matrice 2×2, et B et C sont deux matrices colonne 2×1, alors :

$$B \equiv C \text{ modulo 26 implique } AB \equiv AC \text{ modulo 26.}$$

a) Établir que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.

b) Décrypter le mot XQGY.