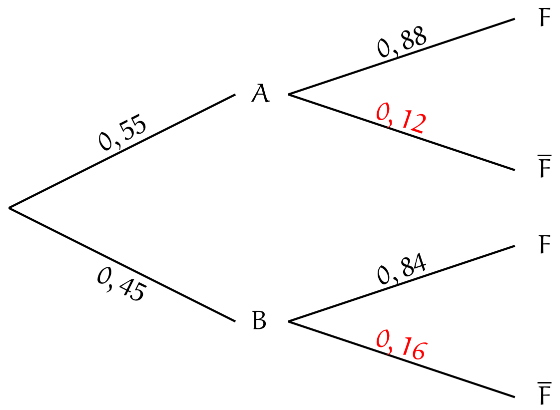
Asie. 2016. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

Notons A l'évènement « la fleur provient de la serre A », B l'évènement « la fleur provient de la serre B » et F l'évènement « la fleur donne un fruit ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(F)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(F) &= P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,484 + 0,378 \\ &= 0,862.\end{aligned}$$

La proposition 1 est vraie.

La probabilité demandée est $P_F(A)$.

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0,55 \times 0,88}{0,862} = 0,561 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

La proposition 2 est fausse.

Partie B

1) Puisque $237 = 250 - 13$ et $263 = 250 + 13$, les deux nombres 237 et 263 sont symétriques par rapport au nombre 250. Pour des raisons de symétrie,

$$P(237 \leqslant X \leqslant 263) = 1 - P(X \leqslant 237) - P(X \geqslant 263) = 1 - 2P(X \leqslant 237) = 1 - 2 \times 0,14 = 0,72.$$

2) a) On sait que Y suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b) $X \leqslant 237 \Leftrightarrow X - 250 \leqslant -13 \Leftrightarrow \dfrac{X-250}{\sigma} \leqslant -\dfrac{13}{\sigma} \Leftrightarrow Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}$. Les événements $X \leqslant 237$ et $Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}$ sont les mêmes et donc

$$P\left(Y \leqslant -\frac{13}{\sigma}\right) = P(X \leqslant 237) = 0,14.$$

c) La calculatrice fournit

$$P\left(Y \leqslant -\frac{13}{\sigma}\right) = 0,14 \Leftrightarrow -\frac{13}{\sigma} = -1,080\ldots \Leftrightarrow \sigma = 12,03\ldots$$

Donc, $\sigma = 12$ arrondi à l'unité.

3) a) La suite $(P(250 - n \leqslant X \leqslant 250 + n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. La calculatrice fournit

$$P(250 - 23 \leqslant X \leqslant 250 + 23) = 0,944\ldots < 0,95 \text{ et } P(250 - 24 \leqslant X \leqslant 250 + 24) = 0,954\ldots \geqslant 0,95.$$

La plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité qu'une barquette soit conforme, est supérieure ou égale à $0,95$, est $n = 24$.

b) La suite $(P(250 \leqslant X \leqslant m))_{m \geqslant 230}$ est croissante. La calculatrice fournit

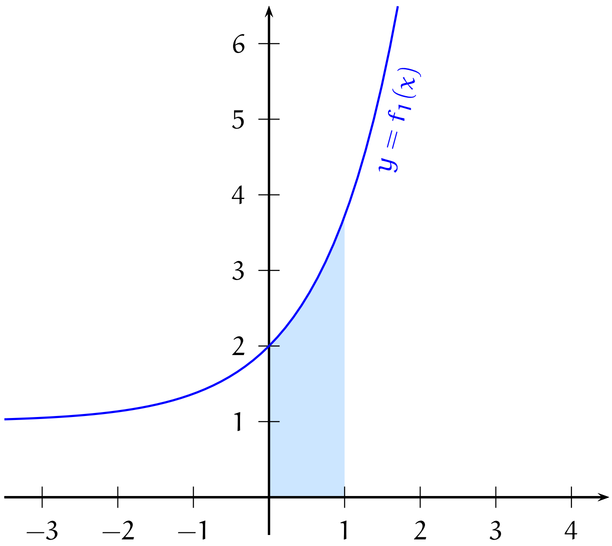
$$P(230 \leqslant X \leqslant 284) = 0,949\ldots < 0,95 \text{ et } P(230 \leqslant X \leqslant 285) = 0,950\ldots \geqslant 0,95.$$

La plus petite valeur de l'entier m pour laquelle $P(230 \leqslant X \leqslant m) \geqslant 0,95$ est $m = 285$.

EXERCICE 2

1) Pour tout réel x, $f_0(x) = 0$. Donc $I(0) = 0$.

2) a) Représentation graphique.



$I(1)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré en bleu.

b) $I(1) = \int_0^1 (e^x + 1)\, dx = [e^x + x]_0^1 = (e^1 + 1) - e^0 = e$.

$$\boxed{I(1) = e = 2,7 \text{ arrondi au dixième.}}$$

3) Soit a un réel de $[0, 1]$.

$$I(a) = \int_0^1 (ae^{ax} + a)\, dx = [e^{ax} + ax]_0^1 = (e^a + a) - e^0 = e^a + a - 1.$$

La fonction I est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel a de $[0, 1]$, $I'(a) = e^a + 1$. La fonction I' est strictement positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction I est strictement croissante sur $[0, 1]$.

La fonction I est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$. De plus, $I(0) = 0 < 2$ et $I(1) = e > 2$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel a_0 de $[0, 1]$ et un seul tel que $I(a_0) = 2$.

La calculatrice fournit $I(0,792) = 1,999\ldots < 2$ et $I(0,793) = 2,003\ldots > 2$. Donc, $I(0,792) < I(a_0) < I(0,793)$. Puisque la fonction I est strictement croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$\boxed{0,792 < a_0 < 0,793.}$$

EXERCICE 3

Partie A : Premier modèle - avec une suite

1) a) Pour tout entier naturel n, notons u_n la masse, exprimée en grammes, de bactéries dans la cuve le n-ème jour.

Puisqu'initialement, la cuve contient 1 kg ou encore 1000 g de bactéries, on a effectivement $u_0 = 1\ 000$.
Soit $n \geqslant 0$. La masse de bactéries l'année $n+1$ est obtenue en rajoutant à la masse de bactéries l'année n, c'est-à-dire u_n, 0,2 fois cette masse puis en soustrayant 100 g. Donc

$$u_{n+1} = u_n + 0,2u_n - 100 = 1,2u_n - 100.$$

b) 30 kg sont encore 30 000 g. La calculatrice fournit les valeurs suivantes :

n	u_n
0	1 000
1	1 100
2	1 220
3	1 364
4	1 536, 8
5	1 744, 2...
6	1 993, 0...
7	2 291, 6...
8	2 649, 9...
9	3 079, 9...
10	3 595, 9...
11	4 215, 0...
12	4 958, 1...
13	5 849, 7...
14	6 919, 6...
15	8 203, 5...
16	9 744, 2...
17	11 593, ...
18	13 812, ...
19	16 474, ...
20	19 669, ...
21	23 503, ...
22	28 103, ...
23	33 624, ...

Le jour n° 23 ou encore au bout de 23 jours, la masse de bactéries dépasse 30 kg.

c) Algorithme complété.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u < 30\ 000$ faire
	    u prend la valeur $1,2u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

• $u_0 = 1000$ et en particulier $u_0 \geqslant 1000$. L'inégalité est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant 1000$. Alors $1,2u_n - 100 \geqslant 1,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} \geqslant 1100$ et en particulier, $u_{n+1} \geqslant 1000$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = 0,2u_n - 100.$$

Puisque $u_n \geqslant 1000$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 100$ et en particulier $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2u_n - 600 = 1,2\left(u_n - 500\right) = 1,2v_n.$$

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$.

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n,$$

puis que

$$u_n = v_n + 500 = 500 \times 1,2^n + 500.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 500 \times 1,2^n + 500.}$$

c) Puisque $1,2 > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,2^n = +\infty$ et on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Partie B : second modèle - avec une fonction

1) a) $f(0) = \dfrac{50}{1+49e^0} = \dfrac{50}{1+49} = 1.$

b) Soit t un réel positif. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $1 + 49e^{-0,2t} > 1$ puis $\dfrac{1}{1+49e^{-0,2t}} < 1$ puis $50 \times \dfrac{1}{1+49e^{-0,2t}} < 50 \times 1$ et donc $\dfrac{50}{1+49e^{-0,2t}} < 50$.

On a montré que pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.

c) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$ et ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$. De plus, pour $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = 50 \times \frac{-\left(1+49e^{-0,2t}\right)'}{(1+49e^{-0,2t})^2} = 50 \times \frac{-49 \times \left(-0,2e^{-0,2t}\right)}{(1+49e^{-0,2t})^2} = \frac{490e^{-0,2t}}{(1+49e^{-0,2t})^2}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,2t} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{50}{1+49\times 0} = 50$.

2) La masse de bactéries est initialement de 1kg. Cette masse croît avec le temps, reste strictement inférieure à 50 kg et vaut environ 50 kg au bout d'une longue durée.

3) Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
f(t) > 30 &\Leftrightarrow \frac{50}{1+49e^{-0,2t}} > 30 \\
&\Leftrightarrow \frac{1+49e^{-0,2t}}{50} < \frac{1}{30} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow 1+49e^{-0,2t} < \frac{5}{3} \Leftrightarrow 49e^{-0,2t} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{-0,2t} < \frac{2}{147} \\
&\Leftrightarrow -0,2t < \ln\left(\frac{2}{147}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow t > -\frac{1}{0,2}\ln\left(\frac{2}{147}\right) \Leftrightarrow t > 5\ln\left(\frac{147}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow t > 21,4\ldots.
\end{aligned}$$

La masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

Partie C : un contrôle de qualité

Ici, $n = 200$ et on suppose que $p = 0,8$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 160$ et $n(1-p) = 40$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\begin{aligned}
\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] &= \left[0,8 - 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}; 0,8 + 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}\right] \\
&= [0,744; 0,856]
\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{146}{200} = 0,73$. f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc l'affirmation de l'entreprise doit être remise en cause au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 4

Partie A : quelques résultats

1) a) $9 \times 3 - 26 \times 1 = 27 - 26 = 1$ et donc le couple $(3, 1)$ est un couple solution.

b) Soit (d, m) un couple d'entiers relatifs.

$$9d - 26m = 1 \Leftrightarrow 9d - 26m = 9 \times 3 - 26 \times 1 \Leftrightarrow 9d - 9 \times 3 = 26m - 26 \times 1 \Leftrightarrow 9(d - 3) = 26(m - 1).$$

c) Soit (d, m) un couple d'entiers relatifs. D'après b), si le couple (d, m) est solution de l'équation (E), alors l'entier 26 divise l'entier $9(d - 3)$. Puisque les entiers 9 et 26 sont premiers entre eux (d'après la question 1)a) et le théorème de BÉZOUT), le théorème de GAUSS permet d'affirmer que l'entier 26 divise l'entier $d - 3$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $d - 3 = 26k$ ou encore $d = 26k + 3$. De même, l'entier 9 divise l'entier $m - 1$ et donc il existe un entier relatif k' tel que $m - 1 = 9k'$ ou encore $m = 9k' + 1$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $d = 26k + 3$ et $m = 9k' + 1$.

$$9d - 26m = 1 \Leftrightarrow 9(d - 3) = 26(m - 1) \Leftrightarrow 9 \times 26k = 26 \times 9k' \Leftrightarrow k = k'.$$

On a montré que les couples (d, m) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(26k + 3, 9k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) a) Soient n et k deux entiers relatifs tels que $n = 26k - 1$. Alors $(-1) \times n + k \times 26 = 1$ et le théorème de BÉZOUT permet d'affirmer que n et 26 sont premiers entre eux.

b) Soient d et k deux entiers relatifs tels que $d = 26k + 3$.

$$9d - 28 = 9 \times 26k + 27 - 28 = 26(9k) - 1.$$

$n = 9k$ est un entier et donc, d'après la question précédente, $9d - 28$ et 26 sont premiers entre eux.

Partie B : cryptage et décryptage

1) A ES, on associe $C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}$. $AC_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix}$.

Puisque $108 = 4 \times 26 + 4$ et $82 = 3 \times 26 + 4$, $\begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $[26]$ et donc ES est codé en EE.

Finalement, le mot ESPION est codé en EELZWH.

2) a) Soient a, b, c et d quatre réels puis $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a + 4c & 9b + 4d \\ 7a + 3c & 7b + 3d \end{pmatrix}$$

et donc

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9a + 4c & 9b + 4d \\ 7a + 3c & 7b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9a + 4c = 1 \\ 7a + 3c = 0 \\ 9b + 4d = 0 \\ 7b + 3d = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -\dfrac{7}{3}a \\ 9a + 4\left(-\dfrac{7}{3}a\right) = 1 \\ d = -\dfrac{9}{4}b \\ 7b + 3\left(-\dfrac{9}{4}b\right) = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ c = 7 \\ b = 4 \\ d = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

De plus, si $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$, alors

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$.

b) XQ correspond à $C'_1 = \begin{pmatrix} 23 \\ 16 \end{pmatrix}$.

$$AC_1 \equiv C'_1\ [26] \Rightarrow A^{-1}AC_1 \equiv A^{-1}C'_1\ [26] \Rightarrow C_1 \equiv A^{-1}C'_1\ [26].$$

$A^{-1}C'_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix}\ [26]$. $\begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix}$ correspond à VR.

De même, GY correspond à $C'_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$. $A^{-1}C'_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ -174 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}\ [26]$.
$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ correspond à AI.

Finalement, le mot XQGY se décode en le mot VRAI.

