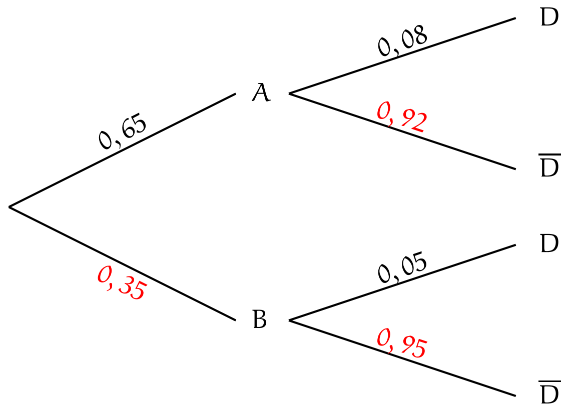
Antilles Guyane. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $P\left(\overline{D}\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P\left(\overline{D}\right) &= P(A) \times P_A\left(\overline{D}\right) + P(B) \times P_B\left(\overline{D}\right)\\ &= 0,65(1-0,08) + (1-0,65)(1-0,05) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,598 + 0,3325 = 0,9305.\end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(\overline{D}\right) = 0,9305.}$$

c) La probabilité demandée est $P_{\overline{D}}(A)$.

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305} = 0,6427 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_{\overline{D}}(A) = 0,6427 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

2) Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules sans défaut. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$ (probabilité qu'une ampoule sortie de la machine A soit sans défaut). En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'ampoule est sans défaut » avec une probabilité $p = 0,92$ et « l'ampoule a un défaut » avec une probabilité $1 - p = 0,08$.

La probabilité demandée est $P(X \geqslant 9)$.

$$\begin{aligned}P(X \geqslant 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08 + 0,92^{10}\\ &= 0,8121 \text{ arrondi à } 10^{-4}.\end{aligned}$$

Partie B

1) a) Soit $a \geqslant 0$.

$$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a},$$

puis

$$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}.$$

b) Soient a et t deux réels positifs.

$$
\begin{aligned}
P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+a) &= \frac{P((T \geqslant t+a)\cap(T \geqslant t))}{P(T \geqslant t)} = \frac{P(T \geqslant t+a)}{P(T \geqslant t)}\\
&= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t-\lambda a+\lambda t}\\
&= e^{-\lambda a} = P(T \geqslant a).
\end{aligned}
$$

2) a) On sait que $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{10\,000} = 0,000\,1$.

b) $P(T \geqslant 5000) = e^{-0,000\,1\times 5000} = e^{-0,5} = 0,6065$ arrondi à 10^{-4}.

c) La probabilité demandée est $P_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000)$.

$$P_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000) = P_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 7000+5000) = P(T \geqslant 5000) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_{T\geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000) = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie C

1) Ici, $n = 1000$ et $p = 0,06$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $np = 60$ et $n(1-p) = 940$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$
\begin{aligned}
\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] &= \left[0,06 - 1,96\frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{1000}}; 0,06 + 1,96\frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{1000}}\right]\\
&= [0,0452; 0,0748].
\end{aligned}
$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

2) La fréquence d'ampoules défectueuses observée est $f = \dfrac{71}{1000} = 0,071$. La fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc remmettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 2

1) Soit Ω le point d'affixe 2. Soient z un nombre complexe puis M le point du plan d'affixe z.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z-2| = 1 \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = 1 \Leftrightarrow \Omega M = 1.$$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre Ω et de rayon 1.

2) Soit a un réel. Soient x un réel puis M le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse x. Les coordonnées du point M sont (x, ax) puis l'affixe du point M est $z_M = x + iax$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow |z_M - 2| = 1 \Leftrightarrow |x + iax - 2| = 1 \Leftrightarrow |(x-2) + iax|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a^2+1\right)x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (E). \end{aligned}$$

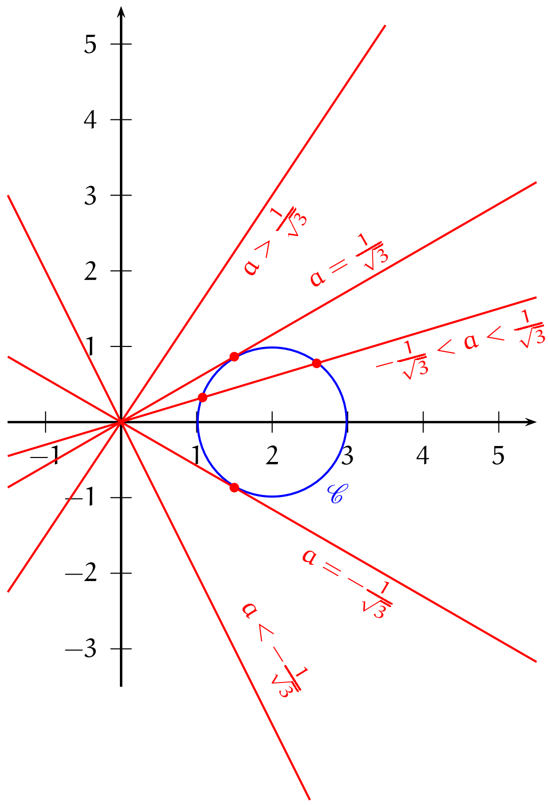
Puisque $a^2 + 1 > 0$, (E) est une équation du second degré. Son discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times \left(a^2+1\right) \times 3 = 16 - 12a^2 - 12 = 4 - 12a^2 = -12\left(a^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= -12\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

1er cas. Si $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta < 0$ et donc l'équation (E) n'a pas de solution. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

2ème cas. Si $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta = 0$ et donc l'équation (E) a exactement une solution. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont exactement un point commun. La droite $\mathscr{D}$ est alors tangente au cercle $\mathscr{C}$.

3ème cas. Si $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < a < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta > 0$ et donc l'équation (E) a exactement deux solutions. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont exactement deux points communs.



EXERCICE 3

Partie A

1) Soit x un réel non nul.

$$f(x) = xe^{1-x^2} = x \times e \times e^{-x^2} = \frac{x^2}{x} \times e \times \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Déjà, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$. Ensuite, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. Par passage à l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$. En multipliant, on obtient finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

2) a) Pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times \left((-2x)e^{1-x^2}\right) = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = \left(1-2x^2\right)e^{1-x^2}.$$

b) Pour tout réel x, $e^{1-x^2} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2 = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré permet alors de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\sqrt{e/2}$	$\nearrow$	$\sqrt{e/2}$	$\searrow$	0

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}} = 1,16\ldots$ et $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}} = -1,16\ldots$

Partie B

1) Il semble que $\mathscr{C}_g$ soit au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ait un point commun et un seul, à savoir leur point d'abscisse 1.

2) Soit $x \in]-\infty, 0]$. Puisque la fonction exponentielle est strcitement positive sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) > 0$. En particulier, $f(x) < g(x)$.

3) a) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) \leqslant g(x) &\Leftrightarrow xe^{1-x^2} \leqslant e^{1-x} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(xe^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(e^{1-x}\right) \ \text{(car } xe^{1-x^2} > 0 \text{ et } e^{1-x} > 0\text{)} \\
&\Leftrightarrow \ln(x) + \ln\left(e^{1-x^2}\right) \leqslant 1 - x \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - x^2 \leqslant 1 - x \\
&\Leftrightarrow \ln(x) - x^2 + x \leqslant 0 \Leftrightarrow \Phi(x) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

b) Pour tout réel $x > 0$,

$$\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 + x(-2x+1)}{x} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $\Phi'(x)$ est du signe de $-2x^2+x+1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$. Le trinôme $-2x^2+x+1$ a deux racines distinctes à savoir $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{-2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2\times 2} = 1$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré montre alors que la fonction Φ' est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1. La fonction Φ est donc strcitement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

c) En particulier, la fonction Φ admet un maximum en 1 et ce maximum est

$$\Phi(1) = \ln(1) - 1^2 + 1 = 0.$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $\Phi(x) \leqslant \Phi(1)$ ou encore $\Phi(x) \leqslant 0$.

4) a) D'après la question 3)a), pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leqslant g(x)$ et d'après la question 2), pour tout $x \leqslant 0$, on a $f(x) \leqslant g(x)$. Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$ et la conjecture de la question 1) de la partie B est donc valide.

b) D'après le résultat admis par l'énoncé, $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$ ou encore $x = 1$. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont donc un point commun et un seul à savoir le point A de coordonnées $(1, g(1))$ ou encore $(1, 1)$.

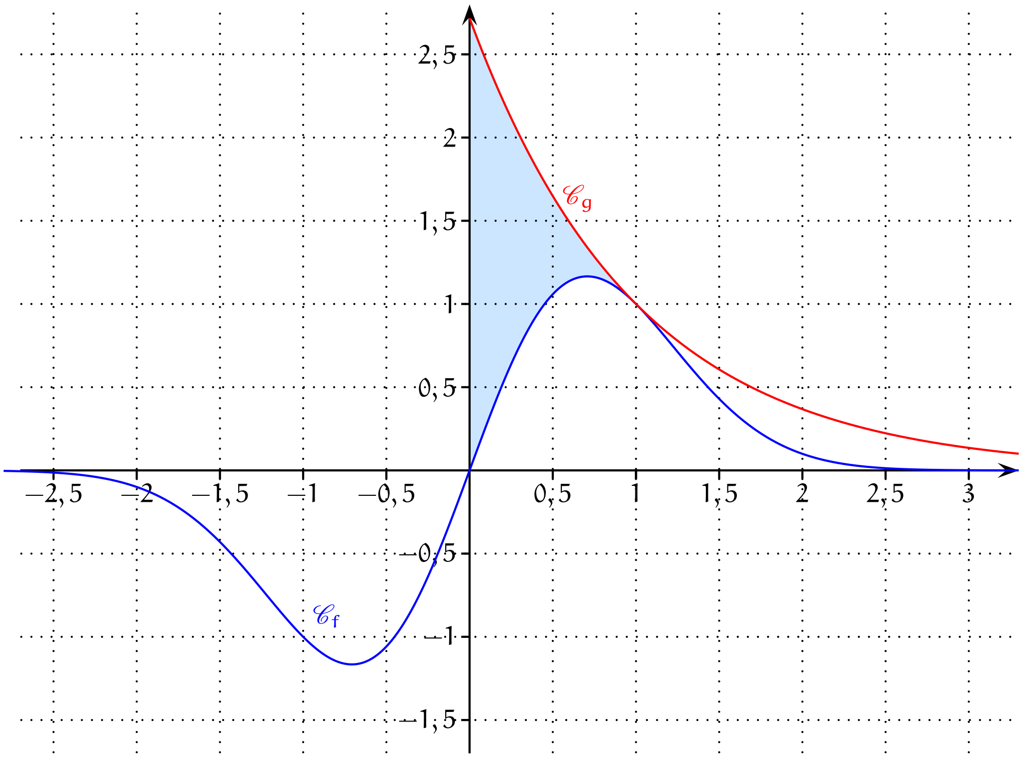
c) On a $x_A = 1$ et $f(x_A) = 1 = g(x_A)$. D'autre part, $f'(x_A) = \left(1 - 2 \times 1^2\right) e^{1-1^2} = -1$ et $g'(x_A) = -e^{1-1} = -1$. Ceci montre déjà que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont le même tangente au point A. Une équation de cette tangente commune est $y = -(x - 1) + 1$ ou encore $y = -x + 2$.

Partie C

1) Pour tout réel x, $f(x) = xe^{1-x^2} = -\dfrac{1}{2} \times (-2x)e^{1-x^2} = -\dfrac{1}{2} \times \left(1 - x^2\right)' e^{1-x^2}$ et donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : pour tout réel x, $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{1-x^2}$.

2) $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right) dx = \left[-e^{1-x} + \frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1 = \left(-e^0 + \frac{1}{2}e^0\right) - \left(-e^1 + \frac{1}{2}e^1\right) = \frac{e-1}{2}$.

3) Pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) \leqslant g(x)$. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right) dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.



EXERCICE 4

1) a) Les points B, E et G ont pour coordonnées respectives $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ et $(1, 0, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ ont pour coordonnées respectives $(-1, 0, 1)$ et $(0, -1, 1)$. On note que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires et donc que les points B, E et G définissent un unique plan puis que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont deux vectuers non colinéaires de ce plan.

Les points D et F ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) et donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE).

b) Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0, 1, 0)$ et $(1, 1, 0)$. Le point I a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

Le plan $\mathscr{P}$ est le plan passant par $I\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{DF}(1, 1, 1)$. Une équation du plan $\mathscr{P}$ est donc $1 \times \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \times (y - 1) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$.

2) Notons $(0, 1, z)$, $z \in \mathbb{R}$, les coordonnées du point N. Le point N est dans le plan $\mathscr{P}$ et donc $0 + 1 + z - \frac{3}{2} = 0$ et donc $z = \frac{1}{2}$. Ainsi, les coordonnées de N sont $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Les points A et E ont pour coordonnées respectives $(0, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$. Le milieu du segment $[AE]$ a pour coordonnées $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right)$ ou encore $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$. Ce milieu est effectivement le point N.

3) a) Les points H et B ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$. Le vecteur $\overrightarrow{HB}$ a donc pour coordonnées $(1, 1, -1)$.

La droite (HB) est la droite passant par $H(0, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{HB}(1, 1, -1)$. Une représentation paramétrique de la droite (HB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $U(t, t, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (HB).

$$U \in \mathscr{P} \Leftrightarrow t + t + (1 - t) - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On a montré que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en le point $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4) Le volume demandé est

$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire de}(FBG) \times FE}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Le volume, exprimé en unités de volume, du tétraèdre $FBGE$ est $\frac{1}{6}$.

