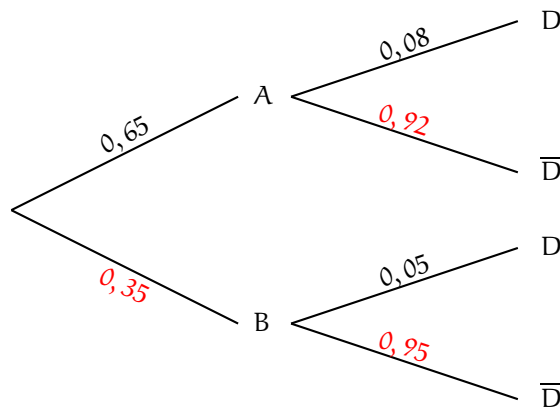


Antilles Guyane. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $P(\overline{D})$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P(A) \times P_A(\overline{D}) + P(B) \times P_B(\overline{D}) \\ &= 0,65(1 - 0,08) + (1 - 0,65)(1 - 0,05) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,598 + 0,3325 = 0,9305. \end{aligned}$$

$$P(\overline{D}) = 0,9305.$$

c) La probabilité demandée est $P_{\overline{D}}(A)$.

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305} = 0,6427 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$P_{\overline{D}}(A) = 0,6427 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

2) Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules sans défaut. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$ (probabilité qu'une ampoule sortie de la machine A soit sans défaut). En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'ampoule est sans défaut » avec une probabilité $p = 0,92$ et « l'ampoule a un défaut » avec une probabilité $1 - p = 0,08$.

La probabilité demandée est $P(X \geq 9)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08 + 0,92^{10} \\ &= 0,8121 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

Partie B

1) a) Soit $a \geq 0$.

$$P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = (-e^{-\lambda a}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda a},$$

puis

$$P(T \geq a) = 1 - P(T \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}.$$

b) Soient a et t deux réels positifs.

$$\begin{aligned}
P_{T \geq t}(T \geq t + a) &= \frac{P((T \geq t + a) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t + a)}{P(T \geq t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda a + \lambda t} \\
&= e^{-\lambda a} = P(T \geq a).
\end{aligned}$$

2) a) On sait que $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ et donc $\lambda = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$.

b) $P(T \geq 5000) = e^{-0,0001 \times 5000} = e^{-0,5} = 0,6065$ arrondi à 10^{-4} .

c) La probabilité demandée est $P_{T \geq 7000}(T \geq 12\,000)$.

$$P_{T \geq 7000}(T \geq 12\,000) = P_{T \geq 7000}(T \geq 7000 + 5000) = P(T \geq 5000) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$P_{T \geq 7000}(T \geq 12\,000) = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

Partie C

1) Ici, $n = 1000$ et $p = 0,06$. On note que $n \geq 30$ puis que $np = 60$ et $n(1 - p) = 940$ de sorte que $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned}
\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] &= \left[0,06 - 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{1000}}; 0,06 + 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{1000}} \right] \\
&= [0,0452; 0,0748].
\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

2) La fréquence d'ampoules défectueuses observée est $f = \frac{71}{1000} = 0,071$. La fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 2

1) Soit Ω le point d'affixe 2. Soient z un nombre complexe puis M le point du plan d'affixe z .

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z - 2| = 1 \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = 1 \Leftrightarrow \Omega M = 1.$$

\mathcal{C} est donc le cercle de centre Ω et de rayon 1.

2) Soit a un réel. Soient x un réel puis M le point de \mathcal{D} d'abscisse x . Les coordonnées du point M sont (x, ax) puis l'affixe du point M est $z_M = x + iax$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow |z_M - 2| = 1 \Leftrightarrow |x + iax - 2| = 1 \Leftrightarrow |(x - 2) + iax|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (ax)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + 1)x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (\text{E}). \end{aligned}$$

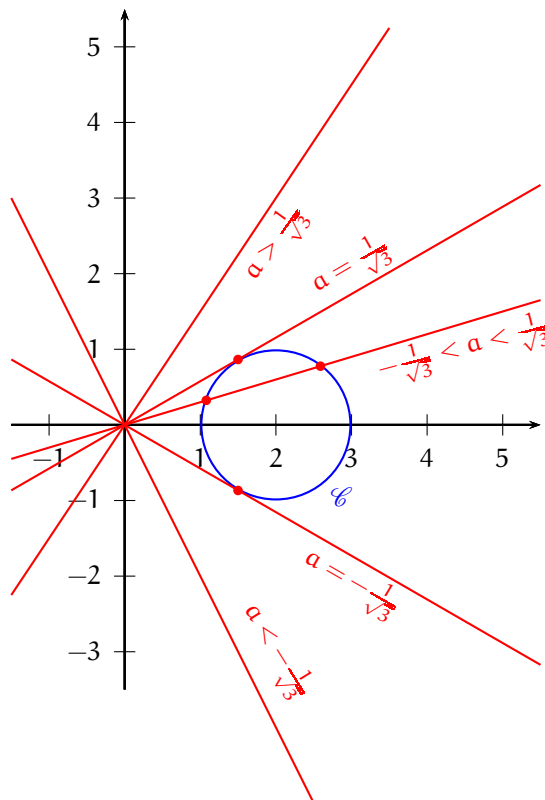
Puisque $a^2 + 1 > 0$, (E) est une équation du second degré. Son discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times (a^2 + 1) \times 3 = 16 - 12a^2 - 12 = 4 - 12a^2 = -12 \left(a^2 - \frac{1}{3} \right) \\ &= -12 \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(a + \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

1er cas. Si $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta < 0$ et donc l'équation (E) n'a pas de solution. Dans ce cas, le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} n'ont pas de point commun.

2ème cas. Si $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta = 0$ et donc l'équation (E) a exactement une solution. Dans ce cas, le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} ont exactement un point commun. La droite \mathcal{D} est alors tangente au cercle \mathcal{C} .

3ème cas. Si $-\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta > 0$ et donc l'équation (E) a exactement deux solutions. Dans ce cas, le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} ont exactement deux points communs.



EXERCICE 3

Partie A

1) Soit x un réel non nul.

$$f(x) = xe^{1-x^2} = x \times e \times e^{-x^2} = \frac{x^2}{x} \times e \times \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Déjà, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$. Ensuite, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Par passage à l'inverse, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$. En multipliant, on obtient finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \times 0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2) a) Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

b) Pour tout réel x , $e^{1-x^2} > 0$ et donc pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2 = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré permet alors de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$				
$f'(x)$		-	0	+	0	-		
f		0		$-\sqrt{e/2}$		$\sqrt{e/2}$		0

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}} = 1,16\dots \text{ et } f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}} = -1,16\dots$$

Partie B

1) Il semble que \mathcal{C}_g soit au-dessus de \mathcal{C}_f sur \mathbb{R} et que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ait un point commun et un seul, à savoir leur point d'abscisse 1.

2) Soit $x \in]-\infty, 0]$. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} , on a $f(x) \leq 0$ et $g(x) > 0$. En particulier, $f(x) < g(x)$.

3) a) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow xe^{1-x^2} \leq e^{1-x} \\ &\Leftrightarrow \ln(xe^{1-x^2}) \leq \ln(e^{1-x}) \quad (\text{car } xe^{1-x^2} > 0 \text{ et } e^{1-x} > 0) \\ &\Leftrightarrow \ln(x) + \ln(e^{1-x^2}) \leq 1 - x \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - x^2 \leq 1 - x \\ &\Leftrightarrow \ln(x) - x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow \Phi(x) \leq 0. \end{aligned}$$

b) Pour tout réel $x > 0$,

$$\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 + x(-2x + 1)}{x} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $\Phi'(x)$ est du signe de $-2x^2 + x + 1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$. Le trinôme $-2x^2 + x + 1$ a deux racines distinctes à savoir $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{-2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{-2 \times 2} = 1$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré montre alors que la fonction Φ' est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1. La fonction Φ est donc strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

c) En particulier, la fonction Φ admet un maximum en 1 et ce maximum est

$$\Phi(1) = \ln(1) - 1^2 + 1 = 0.$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $\Phi(x) \leq \Phi(1)$ ou encore $\Phi(x) \leq 0$.

4) a) D'après la question 3)a), pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leq g(x)$ et d'après la question 2), pour tout $x \leq 0$, on a $f(x) \leq g(x)$. Ainsi, \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{C}_g sur \mathbb{R} et la conjecture de la question 1) de la partie B est donc valide.

b) D'après le résultat admis par l'énoncé, $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$ ou encore $x = 1$. Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont donc un point commun et un seul à savoir le point A de coordonnées $(1, g(1))$ ou encore $(1, 1)$.

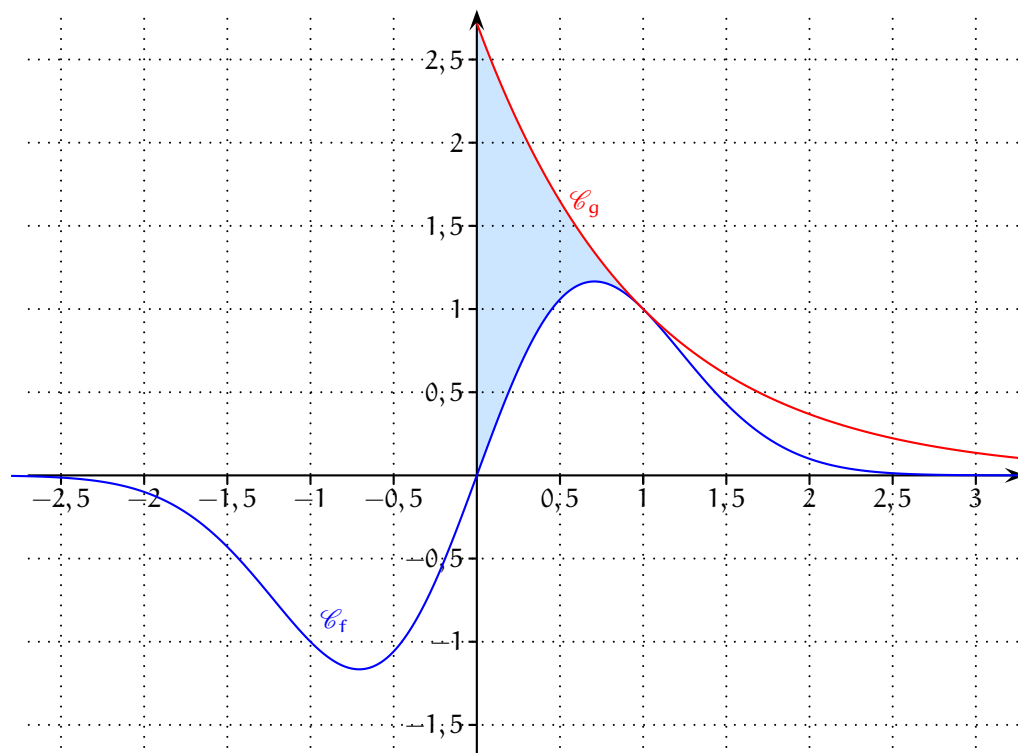
c) On a $x_A = 1$ et $f(x_A) = 1 = g(x_A)$. D'autre part, $f'(x_A) = (1 - 2 \times 1^2) e^{1-1^2} = -1$ et $g'(x_A) = -e^{1-1} = -1$. Ceci montre déjà que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont le même tangente au point A. Une équation de cette tangente commune est $y = -(x - 1) + 1$ ou encore $y = -x + 2$.

Partie C

1) Pour tout réel x , $f(x) = xe^{1-x^2} = -\frac{1}{2} \times (-2x)e^{1-x^2} = -\frac{1}{2} \times (1-x^2)' e^{1-x^2}$ et donc, une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F définie par : pour tout réel x , $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$.

$$2) \int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx = \left[-e^{1-x} + \frac{1}{2}e^{1-x^2} \right]_0^1 = \left(-e^0 + \frac{1}{2}e^0 \right) - \left(-e^1 + \frac{1}{2}e^1 \right) = \frac{e-1}{2}.$$

3) Pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) \leq g(x)$. Donc, $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.



EXERCICE 4

1) a) Les points B, E et G ont pour coordonnées respectives $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ et $(1, 0, 1)$. Les vecteurs \overrightarrow{BE} et \overrightarrow{BG} ont pour coordonnées respectives $(-1, 0, 1)$ et $(0, -1, 1)$. On note que les vecteurs \overrightarrow{BE} et \overrightarrow{BG} ne sont pas colinéaires et donc que les points B, E et G définissent un unique plan puis que les vecteurs \overrightarrow{BE} et \overrightarrow{BG} sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Les points D et F ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$. Le vecteur \overrightarrow{DF} a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, le vecteur \overrightarrow{DF} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) et donc le vecteur \overrightarrow{DF} est un vecteur normal au plan (BGE).

b) Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0, 1, 0)$ et $(1, 1, 0)$. Le point I a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

Le plan \mathcal{P} est le plan passant par I $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{DF}(1, 1, 1)$. Une équation du plan \mathcal{P} est donc $1 \times \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \times (y - 1) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$.

2) Notons $(0, 1, z)$, $z \in \mathbb{R}$, les coordonnées du point N. Le point N est dans le plan \mathcal{P} et donc $0 + 1 + z - \frac{3}{2} = 0$ et donc $z = \frac{1}{2}$. Ainsi, les coordonnées de N sont $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Les points A et E ont pour coordonnées respectives $(0, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$. Le milieu du segment [AE] a pour coordonnées $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right)$ ou encore $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$. Ce milieu est effectivement le point N.

3) a) Les points H et B ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$. Le vecteur \overrightarrow{HB} a donc pour coordonnées $(1, 1, -1)$.

La droite (HB) est la droite passant par H(0, 0, 1) et de vecteur directeur $\overrightarrow{HB}(1, 1, -1)$. Une représentation paramétrique de la droite (HB) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit U(t, t, 1 - t), $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (HB).

$$U \in \mathcal{P} \Leftrightarrow t + t + (1 - t) - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On a montré que la droite (HB) et le plan \mathcal{P} sont sécants en le point T $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4) Le volume demandé est

$$V = \frac{\text{aire de(FBG)} \times FE}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Le volume, exprimé en unités de volume, du tétraèdre FBGE est $\frac{1}{6}$.