

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1) On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

- a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
- c) L'ampoule tirée est sans défaut.
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2) On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1) On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a , $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$.

- a) Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.
- b) Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2) Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

- a) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
- b) Calculer la probabilité $P(T \geq 5 000)$.
- c) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

- 1) Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
- 2) A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

EXERCICE 2 (3 points)

(commun à tous les candidats)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note \mathcal{C} l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 2| = 1$.

1) Justifier que \mathcal{C} est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

2) Soit a un nombre réel. On appelle \mathcal{D} la droite d'équation $y = ax$.

Déterminer le nombre de points d'intersection entre \mathcal{C} et \mathcal{D} en fonction des valeurs du réel a .

EXERCICE 3 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2) a) On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa dérivée.

Démontrer que pour tout réel x ,

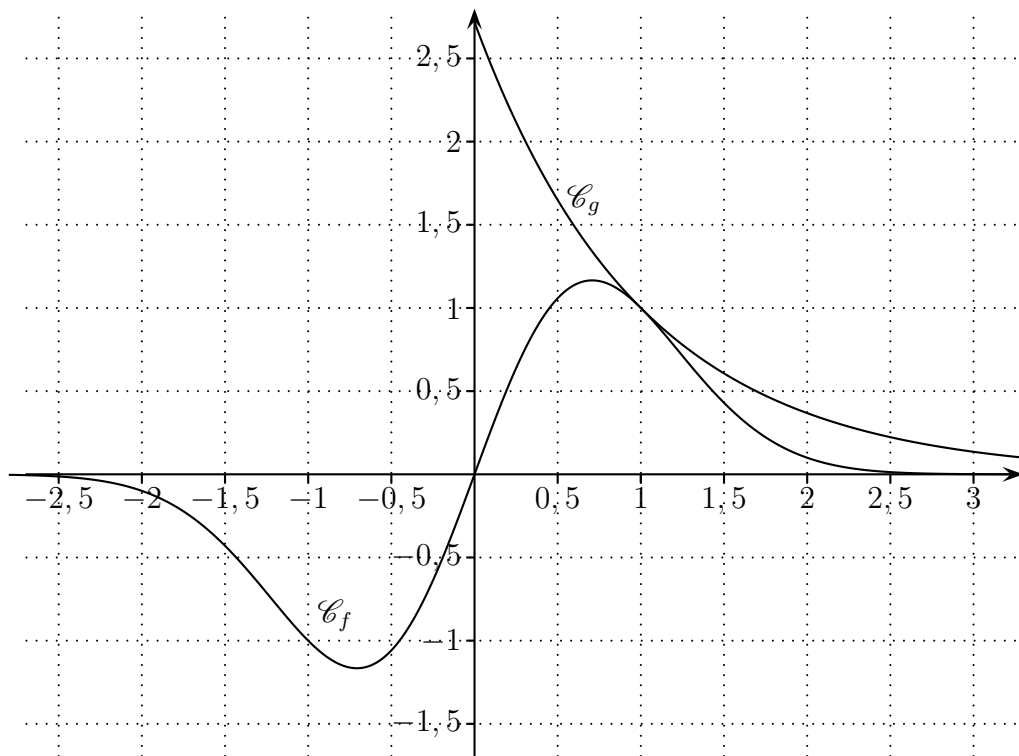
$$f'(x) = (1 - 2x^2) e^{1-x^2}.$$

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1) Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

2) Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.

- 3) Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
- a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.

4) a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

b) Montrer que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un unique point commun, noté A .

c) Montrer qu'en ce point A , ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1) Trouver une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} .

2) En déduire la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$.

3) Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \quad (E).$$

- 1) Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x ; y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

```
Variables : X est un nombre entier
            Y est un nombre entier
Début :    Pour X variant de -5 à 10
            (1) .....
            (2) .....
            Alors Afficher X et Y
            Fin Si
            Fin Pour
            Fin Pour
Fin
```

- 2) a) Donner une solution particulière de l'équation (E).
b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
c) Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la droite \mathcal{D} d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0.$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n ; y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}.$$

- 1) On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = MX_n$.
b) Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n , X_n en fonction de M^n et X_0 .

2) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P , notée P^{-1} , est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

b) Pour tout entier naturel n , donner D^n sans justification.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $M^n = PD^nP^{-1}$.

3) On admet que, pour tout entier naturel n , $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , une expression de x_n et y_n en fonction de n .

4) Montrer que, pour tout entier naturel n , le point A_n appartient à la droite \mathcal{D} .