Polynésie. Septembre 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\boxed{1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.}$$

2) Soit θ un réel.

$$e^{i\theta}(1-i) = e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

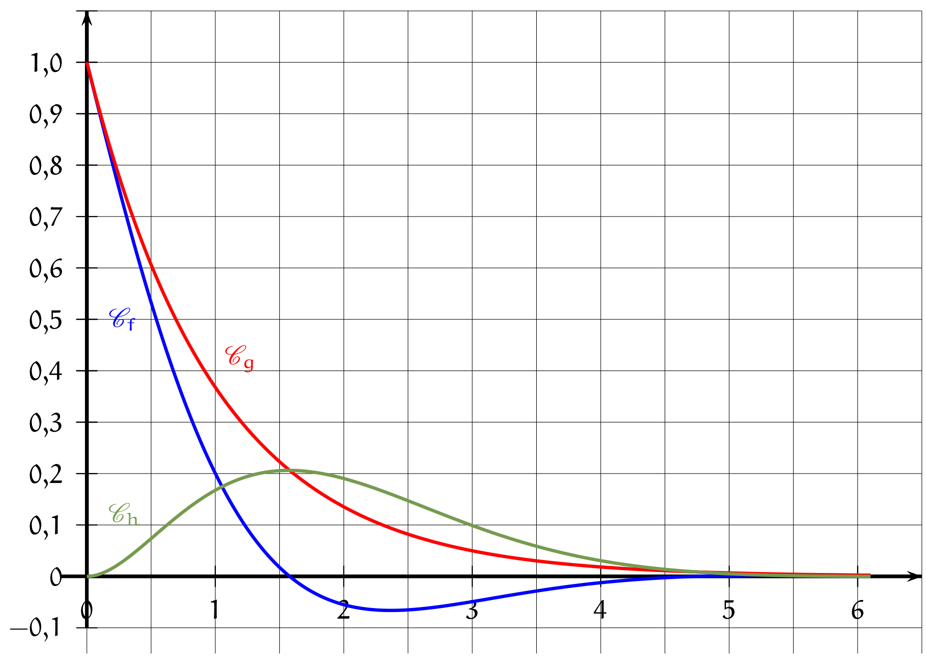
D'autre part,

$$\begin{aligned} e^{i\theta}(1-i) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(1-i) = \cos\theta + i\sin\theta - i\cos\theta + \sin\theta \\ &= (\cos\theta + \sin\theta) + i(-\cos\theta + \sin\theta). \end{aligned}$$

3) Ainsi, $e^{i\theta}(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ et aussi $e^{i\theta}(1-i) = (\cos\theta+\sin\theta)+i(-\cos\theta+\sin\theta)$. Par identification des parties réelles, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout réel } \theta,\ \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).}$$

Partie B



1) Il semble que

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

b) $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0, +\infty[$;

c) l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal quand x est environ égal à $1,5$.

2) Soit x un réel de $[0, +\infty[$. On a $\cos x \leqslant 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif e^{-x}, on obtient $e^{-x}\cos x \leqslant e^{-x}$ ou encore $f(x) \leqslant g(x)$.

Ainsi, pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$ et donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0, +\infty[$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.

Pour tout réel positif x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel positif e^{-x}, on obtient $-e^{-x} \leqslant e^{-x}\cos x \leqslant e^{-x}$. Ainsi,

$$\text{pour tout réel positif } x,\ -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}.$$

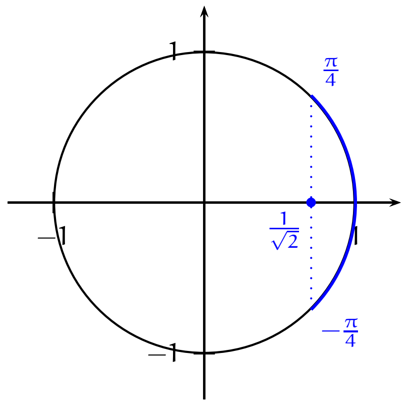
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est aussi asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

4) a) La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\left(\left(-e^{-x}\right)\cos x + e^{-x}(-\sin x)\right) + \left(-e^{-x}\right) = (\cos x + \sin x - 1)\,e^{-x} \\ &= \left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right)e^{-x} \text{ (d'après la partie A).} \end{aligned}$$

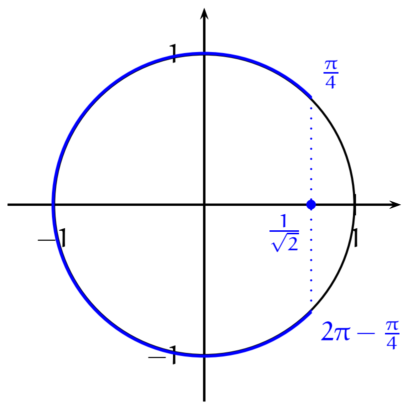
$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ h'(x) = e^{-x}\left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right).}$$

b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Par suite, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$ puis $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$.

Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. Alors, $\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Par suite, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$ puis $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.

c) Pour tout réel x de $[0, 2\pi]$, $e^{-x} > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0, 2\pi]$, $h'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$. De'après la question précédente, la fonction h' est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

$h(0) = e^0 - e^0\cos(0) = 1 - 1 = 0$. $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,21$ arrondi au centième. Enfin, $h(2\pi) = e^{2\pi} - e^{2\pi}\cos(2\pi) = e^{2\pi} - e^{2\pi} = 0$.

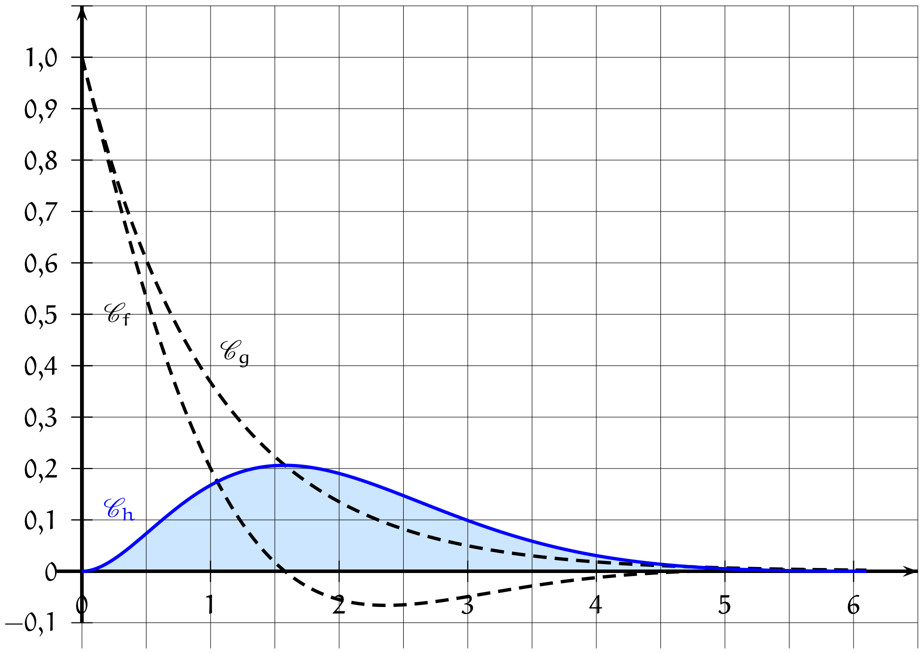
On en déduit le tableau de variations de f.

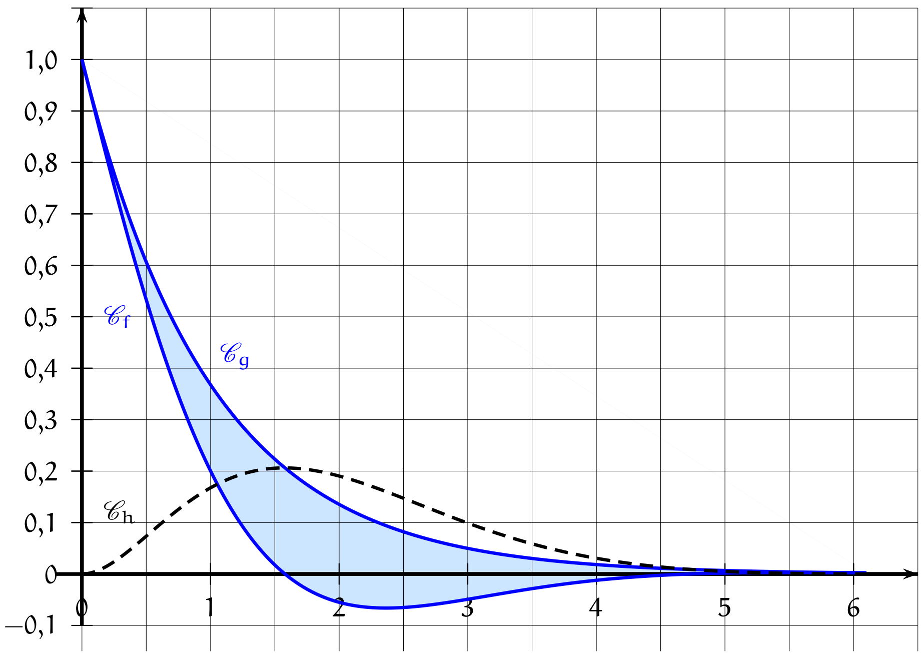
x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	0

5) Les fonctions f et g sont continues sur $[0, 2\pi]$. D'autre part, pour tout réel x de $[0, 2\pi]$, $f(x) \leqslant g(x)$ d'après la question 2). Donc,

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^{2\pi} (g(x) - f(x))\ dx = \int_0^{2\pi} h(x)\ dx = [H(x)]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\pi}(-2 + \cos(2\pi) - \sin(2\pi)) - \frac{1}{2}e^{0}(-2 + \cos(0) - \sin(0)) = -\frac{1}{2}e^{-2\pi} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}.}$$





EXERCICE 2

Partie A

1) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 60)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geqslant 60) = 1 - P(X \leqslant 60) = 0,006 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) L'énoncé fournit $\mu' = 50$ et $P(T' \leqslant 43) = 0,1$. Or

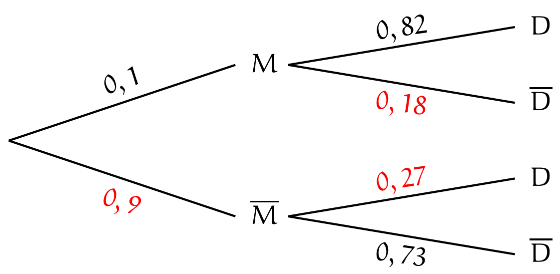
$$T' \leqslant 43 \Leftrightarrow T' - 50 \leqslant -7 \Leftrightarrow \frac{T' - 50}{\sigma'} \leqslant -\frac{7}{\sigma'}.$$

La calculatrice fournit

$$P(T' \leqslant 43) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{T' - 50}{\sigma'} \leqslant -\frac{7}{\sigma'}\right) = 0,1 \Leftrightarrow -\frac{7}{\sigma'} = -1,2815\ldots \Leftrightarrow \sigma' = 5,46 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

Partie B

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(M) \times P_D(M) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(D) = 0,1 \times 0,82 + (1 - 0,1)(1 - 0,73) = 0,082 + 0,243 \\ &= 0,325. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0,325.}$$

2) $P_{\overline{D}}(M)$ est la probabilité qu'un individu ayant un test négatif soit tout de même malade.

$$P_{\overline{D}}(M) = \frac{P\left(M \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(M) \times P_M\left(\overline{D}\right)}{1 - P\left(D\right)} = \frac{0,1(1 - 0,82)}{1 - 0,325} = \frac{0,018}{0,675} = \frac{2}{75} = 0,027 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{P_{\overline{D}}(M) = 0,027 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

3) L'énoncé demande $P_D(M)$.

$$P_D(M) = \frac{P\left(M \cap D\right)}{P\left(D\right)} = \frac{P(M) \times P_M\left(D\right)}{P\left(D\right)} = \frac{0,1 \times 0,82}{0,325} = \frac{0,082}{0,325} = \frac{82}{325} = 0,25 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

Le médecin a donc raison.

Partie C

Déterminons un intervalle de fluctuation au seuil 95%. Ici, $n = 300$ et $p = 0,82$. Notons que $n \geqslant 30$, $np = 246$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 52$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,82 - 1,96\sqrt{\frac{0,82 \times 0,18}{300}}; 0,82 + 1,96\sqrt{\frac{0,82 \times 0,18}{300}}\right] = [0,776; 0,864]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée sur l'échantillon est $f = 0,74$. f n'appartient pas à l'interalle de fluctuation. Donc, le dépistage ne peut pas être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 3

1) Le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ et le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a donc pour coordonnées $(-1, -1, 1)$.

Les points I, J et K ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ et $(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IJ} = (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

et

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK} = (-1) \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) et donc le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

2) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a donc pour coordonnées $(-1, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD} = (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = -1 + 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal à un vecteur normal au plan (IJK) et donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3) La droite (CE) est la droite passant par $C(1, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CE}(-1, -1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CE) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M(1 - t, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CE). Le plan (IJK) est parallèle au plan (BDM) si et seulement si le plan (IJK) est parallèle à deux droites sécantes du plan (BDM) comme les droites (BD) et (BM). On sait déjà que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK). Puisque le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK),

$$(BDM) \parallel (IJK) \Leftrightarrow (BM) \parallel (IJK) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CE} = 0.$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont $(-1, -1, 1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BM}$ sont $(-t, 1 + t, t)$. Donc,

$$(BDM) \parallel (IJK) \Leftrightarrow (-1) \times (-t) + (-1) \times (1 - t) + 1 \times t = 0 \Leftrightarrow 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = 1$, on obtient le point $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

EXERCICE 4.

1) Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. Donc,

$$S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

Les diviseurs de 7 sont 1 et 7. Donc,

$$S(7) = 1 + 7 = 8.$$

2) a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. 1 et n sont des diviseurs positifs de n et 1 et n sont distincts. Donc $S(n) = 1 + n + \ldots$
En particulier, $S(n) \geqslant n + 1$.

b) $S(n) = n + 1$ si et seulement si n n'admet pas d'autre diviseur positifs que 1 et n ou encore $S(n) = n + 1$ si et seulement si n est premier.

3) a) n admet exactement quatre diviseurs positifs deux à deux distincts à savoir 1, p, q et pq. Donc,

$$S(n) = 1 + p + q + pq = (1 + p) + (1 + p)q = (1 + p)(1 + q).$$

b) $S(2) = 3$ et $S(4) = 1 + 2 + 4 = 7$. Donc, $S(2) \times S(4) = 3 \times 7 = 21$. D'autre part,

$$S(2 \times 4) = S(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15.$$

Ainsi, $S(2 \times 4) \neq S(2) \times S(4)$. La rpoposition de l'énoncé est donc fausse.

4) a) Les diviseurs de n sont les nombres de la forme p^j où $0 \leqslant j \leqslant k$.

b) Donc, puisque $p \neq 1$,

$$S(n) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^k = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p}.$$

5) a) • Soient s et t deux entiers tels que $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ puis $m = p^s \times q^t$. Alors,

$$n = p^{13} \times q^7 = \left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) \times \left(p^s \times q^t\right) = \left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) \times m.$$

où de plus $13 - s$ et $7 - t$ sont des entiers positifs. Donc, en posant $K = p^{13-s} \times q^{7-t}$, K est un entier tel que $n = Km$. Ceci montre que m divise n.

• Réciproquement, soit m un entier strictement positif qui est un diviseur de n. Si $m = 1$, m s'écrit $p^0 \times q^0$. m est donc du type $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

Sinon, $m \geqslant 2$. Soit r un facteur premier de m. Si $r \neq p$ et $r \neq q$, alors r est premier avec l'entier $n = p^{13} \times q^7$ car n'a pas de facteur premier commun avec n. D'autre part, r divise m et m divise n. Donc, r divise n.
Ainsi, r divise $n = n \times 1$ et r est premier avec n. Donc, r divise 1 d'après le théorème de Gauss. Ceci contredit le fait que r est un nombre premier et donc $r = p$ ou $r = q$.

Ce qui précède montre que dans tous les cas, m est de la forme $p^s \times q^t$ où s et t sont des entiers positifs. Ensuite, n s'écrit sous la forme $m \times K$ où K est un entier qui est aussi un diviseur positif de n. Donc, il existe des entiers naturels s' et t' tels que $K = p^{s'}q^{t'}$. L'égalité $n = Km$ s'écrit :

$$p^{13}q^7 = n = Km = p^{s+s'}q^{t+t'}.$$

Par unicité de la décomposition d'un entier en facteur premier, on a $s + s' = 13$ et $t + t' = 7$ ou encore $s = 13 - s'$ et $t = 7 - t'$. Ceci impose $s \leqslant 13$ et $t \leqslant 7$.

On a montré que les diviseurs de n sont les entiers m de la forme p^sq^t où s et t sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

b) Par suite,

$$\begin{aligned}
S(n) &= \left(1 + q + \ldots + q^7\right) + \left(p + pq + \ldots + pq^7\right) + \ldots + \left(p^{13} + p^{13}q + \ldots + p^{13}q^7\right) \\
&= \left(1 + q + \ldots + q^7\right) + p\left(1 + q + \ldots + q^7\right) + \ldots + p^{13}\left(1 + q + \ldots + q^7\right) \\
&= \left(1 + p + \ldots + p^{13}\right)\left(1 + q + \ldots + q^7\right) \\
&= \frac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \frac{1 - q^8}{1 - q} \text{ (car } p \neq 1 \text{ et } q \neq 1).
\end{aligned}$$

