France métropolitaine/Réunion. Septembre 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Question 1 D'après la formule des probabilités totales fournit

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = 0,6 \times 0,2 + (1-0,6) \times 0,3 = 0,12 + 0,12 = 0,24.$$

La bonne réponse est la **réponse c**.

Question 2 La probabilité demandée est $P(T \geqslant 60)$ avec

$$\begin{aligned} P(T \geqslant 60) &= 1 - P(T \leqslant 60) = 1 - \int_0^{60} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{60} = 1 - \left(-e^{-60\lambda} + e^0\right) \\ &= e^{-60\lambda} = e^{-60\ln 2/30} = e^{-2\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-2} = 2^{-2} \\ &= \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

La bonne réponse est la **réponse b**.

Question 3 $P(X \geqslant 135) = P(X \leqslant \mu + \sigma)$. On sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,683$ arrondi au millième et donc, pour des raisons de symétrie

$$P(X \geqslant 135) = \frac{1 - P(X \leqslant \mu + \sigma)}{2} = 0,159 \text{ arrondi au millième.}$$

La bonne réponse est la **réponse a**.

Question 4 L'intervalle doit être centré en $0,5$ ce qui élimine les réponses a, b et d. La bonne réponse est la **réponse c**.

Question 5 Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où f est la fréquence de personnes de plus de 60 ans observée dans l'échantillon et n est l'effectif de l'échantillon. L'amplitude de cet intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,05 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{5}{100} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \frac{100}{5} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 40 \Leftrightarrow n \geqslant 1600.$$

La bonne réponse est la **réponse c**.

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit n un entier naturel. D'après la relation de CHASLES

$$I_{n+1} = \int_0^{n+1} f(x)\ dx = \int_0^{n} f(x)\ dx + \int_n^{n+1} f(x)\ dx = I_n + \int_n^{n+1} f(x)\ dx,$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x)\ dx.$$

Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et donc sur $[n, n+1]$, par positivité de l'intégrale, $\int_n^{n+1} f(x)\ dx \geqslant 0$ ou encore $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ ou encore $I_{n+1} \geqslant I_n$ et donc

la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2} > 0$ puis $\dfrac{1}{e^x - x} \leqslant \dfrac{2}{e^x}$ par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant les deux membres de la dernière inégalité pat le réel positif x, on obtient $\dfrac{x}{e^x - x} \leqslant \dfrac{2x}{e^x}$ ou encore $f(x) \leqslant 2xe^{-x}$. Ainsi, pour tout réel x de $[0, n]$, $f(x) \leqslant 2xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$I_n = \int_0^{n} f(x)\ dx \leqslant \int_0^{n} 2xe^{-x}\ dx.$$

b) La fonction H est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$H'(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-1) \times \left(-e^{-x}\right) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

c) Ainsi, la fonction $2H$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Soit n un entier naturel.

$$\int_0^{n} 2xe^{-x}\ dx = [2H(x)]_0^n = 2(-n-1)e^{-x} - 2(0-1)e^0 = 2 - 2(n+1)e^{-n}.$$

D'après la question 2)a),

$$I_n \leqslant 2 - 2(n+1)e^{-n} \leqslant 2,$$

car $(n+1)e^{-x} \geqslant 0$.

3) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question 1) et est majorée par 2 d'après la question 2)c). On en déduit que

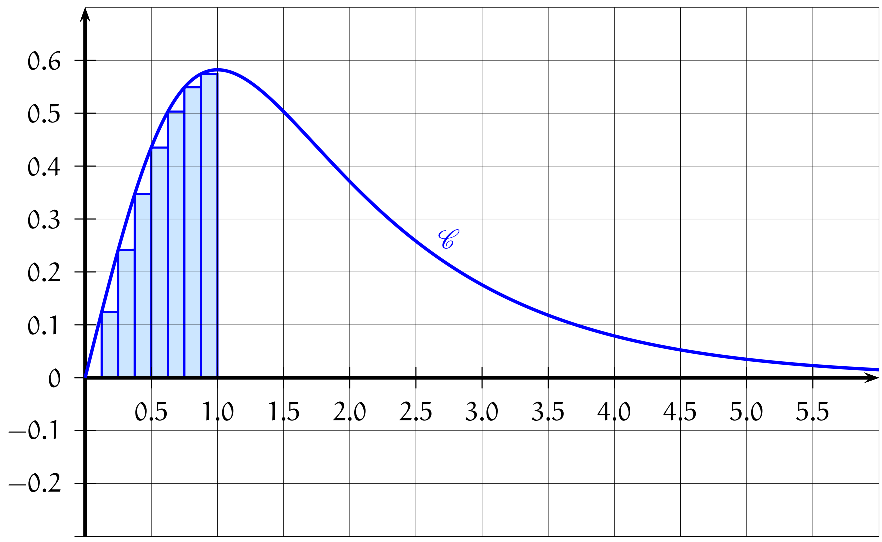
la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Partie B

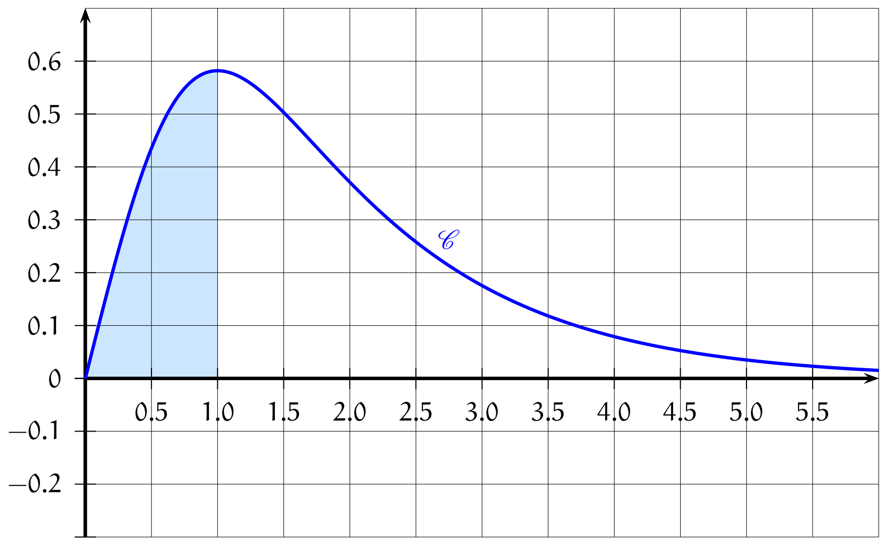
1) Valeurs successives de A

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2) La dernière valeur de A affichée par l'algorithme est la somme des aires des rectangles ci-dessous



3) L'algortihtme fournit une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ obtenue par la méthode des rectangles avec un pas de $\dfrac{1}{K}$.
Quand K devient très grand, l'alorithme affiche une très bonne valeur approchée de cette intégrale ou encore une très bonne valeur approchée de l'aire ci-dessous :



EXERCICE 3.

Partie A

1) Puisque $15 = 3 \times 5$ et $26 = 2 \times 13$, les entiers 15 et 26 n'ont pas de facteur premier commun et sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de BÉZOUT, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $15u - 26v = 1$. Puisque $7 \times 15 - 4 \times 26 = 105 - 104 = 1$, le couple $(u_0, v_0) = (7, 4)$ est un tel couple.

2) On a $15u_0 - 26v_0 = 1$. En multipliant les deux membres de cette égalité par m, on obtient $15u_0m - 26v_0m = m$. Donc le couple $(7m, 4m)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E).

3) Soit (x, k) un couple d'entiers relatifs.

$$15x - 26k = m \Leftrightarrow 15x - 26k = 15x_0 - 26k_0 \Leftrightarrow 15x - 15x_0 = 26k - 26k_0 \Leftrightarrow 15(x - x_0) = 26(k - k_0).$$

4) Soit (x, k) un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E). D'après la question précédente, $15(x - x_0) = 26(k - k_0)$. En particulier, l'entier 26 divise l'entier $15(x - x_0)$. Puisque les entiers 15 et 26 sont premiers entre eux, le théorème de GAUSS montre que nécessairement l'entier 26 divise l'entier $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif q tel que $x - x_0 = 26q$ ou encore $x = 7m + 26q$.
De même, il existe un entier relatif q' tel que $k - k_0 = 15q'$ ou encore $k = 4m + 15q'$.

Soient alors q et q' deux entiers relatifs puis $x = 7m + 26q$ et $k = 4m + 15q'$.

$$\begin{aligned}15x - 26k = m &\Leftrightarrow 15(7m + 26q) - 26(4m + 15q') = m \Leftrightarrow 15(7m) - 26(4m) + 15 \times 26(q - q') = m\\ &\Leftrightarrow 15 \times 26(q - q') = 0 \Leftrightarrow q = q'.\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples (x, k) d'entiers relatifs tels que

$$\left\{\begin{array}{l} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{array}\right. \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

Partie B

1) • la lettre M correspond à $x = 12$. $15 \times 12 + 7 = 187 = 7 \times 26 + 5$ avec $0 \leqslant 5 \leqslant 25$. Donc, $y = 5$. 5 correspond à la lettre F et donc M est codée par F.

• la lettre A correspond à $x = 0$. $15 \times 0 + 7 = 7 = 0 \times 26 + 7$ avec $0 \leqslant 7 \leqslant 25$. Donc, $y = 7$. 7 correspond à la lettre H et donc A est codée par H.

• la lettre T correspond à $x = 19$. $15 \times 19 + 7 = 292 = 11 \times 26 + 6$ avec $0 \leqslant 6 \leqslant 25$. Donc, $y = 6$. 6 correspond à la lettre G et donc T est codée par G.

• la lettre H correspond à $x = 7$. $15 \times 7 + 7 = 112 = 4 \times 26 + 8$ avec $0 \leqslant 8 \leqslant 25$. Donc, $y = 8$. 8 correspond à la lettre I et donc H est codée par I.

• la lettre S correspond à $x = 18$. $15 \times 18 + 7 = 277 = 10 \times 26 + 17$ avec $0 \leqslant 17 \leqslant 25$. Donc, $y = 17$. 17 correspond à la lettre R et donc S est codée par R.

Le mot MATHS est codé par le mot FHGIR.

2) a) Par construction $15x + 7 \equiv y$ [26]. Donc, il existe un entier relatif k etl que $15x + 7 = y + 26k$ ou encore $15x - 26k = y - 7$.

b) D'après la partie A, il existe un entier relatif q tel que $x = 26q + 7(y - 7)$. On en déduit que $x \equiv 7(y - 7)$ [26] ou encore que $x \equiv 7y - 49$ [26] ou encore que $x \equiv 7y - 49 + 2 \times 26$ [26] ou enfin que $x \equiv 7y + 3$ [26].

c) Pour décoder une lettre, on lui associe le nombre y fourni par le tableau. On calcule ensuite le reste de la division euclidienne de $7y + 3$ par 26. Ce reste est x et correspond à la lettre décodée.

3) • la lettre W correspond à $y = 22$. $7 \times 22 + 3 = 157 = 6 \times 26 + 1$ avec $0 \leqslant 1 \leqslant 25$. Donc, $x = 1$. 1 correspond à la lettre B et donc W est décodée par B.

• la lettre H correspond à $y = 7$. $7 \times 7 + 3 = 52 = 2 \times 26 + 0$ avec $0 \leqslant 0 \leqslant 25$. Donc, $x = 0$. 0 correspond à la lettre A et donc H est décodée par A.

• la lettre L correspond à $y = 11$. $7 \times 11 + 3 = 80 = 3 \times 26 + 2$ avec $0 \leqslant 2 \leqslant 25$. Donc, $x = 2$. 2 correspond à la lettre C et donc L est décodée par C.

Le mot WHL est décodé par le mot BAC.

4) Soient x et x' deux entiers compris au sens large entre 0 et 25 puis y et y' les entiers respectivement associés par le système de codage. Il s'agit de vérifier que $x \neq x' \Rightarrow y \neq y'$ ou encore que $y = y' \Rightarrow x = x'$.

$$\begin{aligned} y = y' &\Rightarrow 7x + 3 \equiv 7x' + 3\ [26] \Rightarrow 7(x - x') \equiv 0\ [26] \\ &\Rightarrow 26 \text{ divise } 7(x - x') \\ &\Rightarrow 26 \text{ divise } x - x' \text{ (d'après le théorème de Gauss et puisque PGCD}(7, 26) = 1). \end{aligned}$$

Donc, $x - x'$ est un mutiple de 26 ou encore il existe un entier relatif k tel que $x - x' = 26k$. Mais d'autre part, $0 \leqslant x \leqslant 25$ et $0 \leqslant x' \leqslant 25$. On en déduit que $-25 \leqslant x - x' \leqslant 25$ ou encore que $-25 \leqslant 26k \leqslant 25$ ou encore que $-\dfrac{25}{26} \leqslant k \leqslant \dfrac{25}{26}$ ou enfin que $k = 0$. Mais alors $x = x'$.

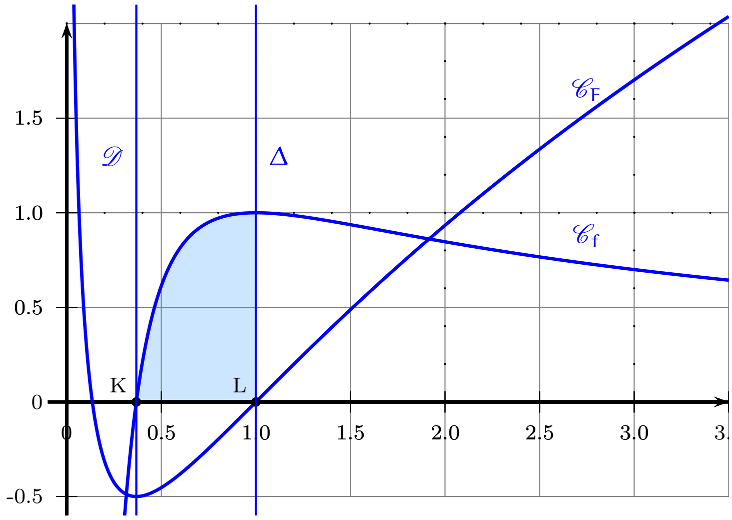
On a montré que deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

EXERCICE 4.

1) Notons x_K l'abscisse du point K. Par définition du point K, on a $f(x_K) = 0$ ou encore $F'(x_K) = 0$. Ainsi, en le point de $\mathscr{C}_F$ de même abscisse que K, $\mathscr{C}_F$ a une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Ceci ne se produit que dans la **Situation 2**.

Les graphes exacts sont donc les graphes de la situation 2.

2) a) En analysant le nombre de carreaux contenu dans le domaine ci-dessous, l'aire est approximativement égale à 2 fois l'aire d'un carreau ou encore $2 \times 0,25$ unité d'aire ou enfin $0,5$ unité d'aire.



b) Déterminons d'abord l'abscisse du point K. Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(1 + \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

Le point K a pour abscisse $\frac{1}{e}$. D'autre part, la fonction f est continue et positive sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Donc, l'aire cherchée, exprimée en unité d'aire est

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln(x)\right)\,dx = \left[\ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1} \\
&= \left(\ln(1) + \frac{1}{2}(\ln(1))^2\right) - \left(\ln(1/e) + \frac{1}{2}(\ln(1/e))^2\right) = -\left(-1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} = 0,5.
\end{aligned}$$

L'aire cherchée est égale à $0,5$ unité d'aire.

