

EXERCICE 1

Partie A : étude de la fonction f_1

1) a) f_1 est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f_1'(x) = 2x \times e^{-2x} + x^2 \times (-2e^{-2x}) = (2x - 2x^2) e^{-2x} = 2xe^{-2x}(1 - x).$$

b) Pour tout réel x , $2e^{-2x} > 0$. Donc, pour tout réel x , $f_1'(x)$ est du signe de $x(1 - x)$. $x(1 - x)$ est un trinôme du second degré qui admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet de dresser le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$	0
f_1	$+\infty$	0	e^{-2}	0

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty.$$

d) Pour tout réel x ,

$$f_1(x) = x^2 e^{-2x} = \frac{x^2}{e^{2x}} = \frac{x^2}{(e^x)^2} = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0^2 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0.$$

2) $I_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \left[-e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right]_0^1 = -e^{-2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + e^0 \left(0 + 0 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} e^{-2}.$

$$I_1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} e^{-2}.$$

Partie B : étude de la suite (I_n)

1) a) Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc, I_n est l'aire exprimée en unités d'aire du domaine du plan compris entre l'axe (Ox) et la courbe \mathcal{C}_n d'une part et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

b) Les tracés des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et \mathcal{C}_4 à la calculatrice suggèrent que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = x^2 e^{-2(n+1)x} = x^2 e^{-2nx-2x} = x^2 e^{-2nx} \times e^{-2x} = e^{-2x} f_n(x).$$

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $-2x \leq 0$ et donc $e^{-2x} \leq 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif $f_n(x)$, on obtient $e^{-2x} f_n(x) \leq e^{-nx}$ ou encore $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

c) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$ ou encore que $I_{n+1} \leq I_n$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n , $I_{n+1} \leq I_n$ et donc

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel positif e^{-2nx} , on obtient $0 \leq x^2 e^{-2nx} \leq e^{-2nx}$ ou encore $0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$.

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-2nx} dx$ avec

$$\int_0^1 e^{-2nx} dx = \left[-\frac{1}{2n} e^{-2nx} \right]_0^1 = -\frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{e^0}{2n} = \frac{1 - e^{-2n}}{2n}.$$

Pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq I_n \leq \frac{1 - e^{-2n}}{2n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-2n} = 1$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$. En divisant, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2n}}{2n} = 0.$$

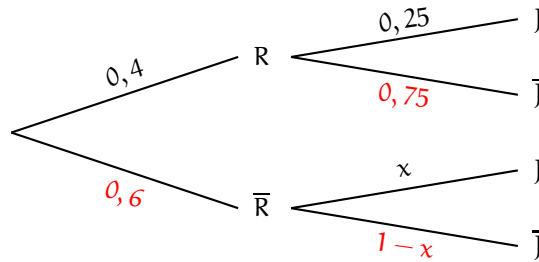
Mais alors, l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes fournissent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

EXERCICE 2

Partie A

1) L'énoncé fournit $P(R) = 0,4$, $P_R(J) = 0,25$, $P_{\bar{R}} = x$ et $P(J) = 0,2$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(J) = P(R) \times P_R(J) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(J),$$

ou encore

$$0,20 = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x,$$

et donc

$$x = \frac{0,2 - 0,4 \times 0,25}{0,6} = \frac{0,2 - 0,1}{0,6} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}.$$

$$x = \frac{1}{6}.$$

3) La probabilité demandée est $P_J(R)$.

$$P_J(R) = \frac{P(R \cap J)}{P(J)} = \frac{P(R) \times P_R(J)}{P(J)} = \frac{0,4 \times 0,25}{0,2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$$P_J(R) = 0,5.$$

Partie B

1) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 500 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues, « la bouteille est pur jus » avec une probabilité $p = 0,2$ et « la bouteille n'est pas pur jus » avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.

2) La probabilité demandée est $P(X \geq 75)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geq 75) = 1 - P(X \leq 74) = 0,998 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie C

1) Ici, $n = 900$ et $p = 0,9$. On note que $n \geq 30$ puis $np = 810$ et donc $np \geq 5$ et aussi $n(1 - p) = 90$ et donc $n(1 - p) \geq 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0,9 - 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{900}}; 0,9 + 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{900}} \right] = [0,8804; 0,9196].$$

2) La fréquence observée est $f = \frac{766}{900} = 0,851$ arrondi à 10^{-3} . La fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et on peut donc penser que l'affirmation du fournisseur est fautive au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 3

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) &= \ln(u_n) - 1 \Rightarrow e^{\ln(u_{n+1})} = e^{\ln(u_n)-1} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{e^{\ln(u_n)}}{e^1} \\ &\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{e} \times u_n.\end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \frac{1}{n+1}$. Pour tout entier naturel n , $v_n \leq 1$. Donc, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite majorée.

D'autre part, pour tout entier naturel n ,

$$w_n = 1 - \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 + \ln(n+1).$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$ et en particulier que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

On a fourni un exemple de suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à terme réels strictement positifs et majorée telle que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas majorée. La proposition (\mathcal{P}) est donc fautive.

$$3) \bullet \left| \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4} \right| = \frac{1}{4} \left| \sqrt{2} + i\sqrt{6} \right| = \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\bullet |z_0| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|z_{n+1}| = \left| \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4} \right) z_n \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4} \right| |z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_n|.$$

Donc, la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$|z_n| = |z_0| \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = \frac{\sqrt{13}}{(\sqrt{2})^n}.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}|z_n| \leq 10^{-20} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{(\sqrt{2})^n} \leq \frac{1}{10^{20}} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq \sqrt{13} \times 10^{20} \\ &\Leftrightarrow \ln\left((\sqrt{2})^n\right) \geq \ln\left(\sqrt{13} \times 10^{20}\right) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{2} \ln(2) \geq \frac{\ln(13)}{2} + 20 \ln(10) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(13) + 40 \ln(10)}{\ln(2)} \quad (\text{car } \ln(2) > 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 136,5 \dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 137 \quad (\text{car } n \text{ est un entier}).\end{aligned}$$

Les entiers naturels n tels que $|z_n|$ soit inférieur ou égal à 10^{-20} sont les entiers supérieurs ou égaux à 137.

EXERCICE 4.

1) a) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Donc, le vecteur \overrightarrow{DB} a pour coordonnées $(1, -1, 0)$.

La droite (DB) est la droite passant par D(0, 1, 0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{DB}(1, -1, 0)$. Une représentation paramétrique de la droite (DB) est donc

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Donc, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ puis le vecteur \overrightarrow{AG} a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

La droite (AG) est la droite passant par A(0, 0, 0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1, 1, 0)$. Une représentation paramétrique de la droite (AG) est donc

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2) Soient $M(s, 1 - s, 0)$, $s \in \mathbb{R}$, un point de la droite (DB) et $N(t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AG). Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{MN} sont $(t - s, t + s - 1, t)$. A partir des troisième et première coordonnées, si ce vecteur est nul, on a $t = 0$ puis $s = 0$. Mais alors $t + s - 1 = -1 \neq 0$. Donc, les points M et N sont toujours distincts ou encore la droite (MN) est toujours définie.

Puisque M est un point de (DB) et N est un point de (AG), la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (DB) si et seulement si la droite (MN) est orthogonale aux droites (AG) et (DB). Or

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AG} = (t - s) \times 1 + (t + s - 1) \times 1 + t \times 1 = 3t - 1$$

et

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = (t - s) \times 1 + (t + s - 1) \times (-1) + t \times 0 = -2s + 1.$$

Par suite,

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \text{ et } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow 3t - 1 = 0 \text{ et } -2s + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \text{ et } s = \frac{1}{2}.$$

Pour $s = \frac{1}{2}$, on obtient le point M de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et pour $t = \frac{1}{3}$, on obtient le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

On a démontré que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (DB) si et seulement si M est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et N est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3) a) Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{MN} sont $(t - s, t + s - 1, t)$. Donc,

$$\begin{aligned} MN^2 &= (t - s)^2 + (t + s - 1)^2 + t^2 = (t - s)^2 + (t + s - 1)(t + s - 1) + t^2 \\ &= t^2 - 2st + s^2 + t^2 + ts - t + st + s^2 - s - t - s + 1 + t^2 = 3t^2 + 2s^2 - 2t - 2s + 1 \\ &= 3\left(t^2 - \frac{2}{3}t\right) + 2(s^2 - s) + 1 = 3\left(\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) + 2\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 1 \\ &= 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

b) Pour tous réels s et t,

$$3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \geq \frac{1}{6}$$

avec égalité si et seulement si $3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ ce qui équivaut à $\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ ou encore $t = \frac{1}{3}$ et $s = \frac{1}{2}$.

Les points M et N pour lesquels la distance MN est minimale sont les points de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Quand la distance MN est minimale, la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (DB) et (AG).