Antilles Guyane. Septembre 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A : étude de la fonction f_1

1) a) f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 2x \times e^{-2x} + x^2 \times \left(-2e^{-2x}\right) = \left(2x - 2x^2\right) e^{-2x} = 2xe^{-2x}(1-x).$$

b) Pour tout réel x, $2e^{-2x} > 0$. Donc, pour tout réel x, $f_1'(x)$ est du signe de $x(1-x)$. $x(1-x)$ est un trinôme du second degré degré qui admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet de dresser le tableau de variations de le fonction f_1 :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty.}$$

d) Pour tout réel x,

$$f_1(x) = x^2e^{-2x} = \frac{x^2}{e^{2x}} = \frac{x^2}{(e^x)^2} = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0^2 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.}$$

2) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = \left[-e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)\right]_0^1 = -e^{-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + e^0\left(0 + 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - e^{-2}.$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-2}.}$$

Partie B : étude de la suite (I_n)

1) a) Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$. Donc, I_n est l'aire exprimée en unités d'aire du doamine du plan compris entre l'axe (Ox) et la courbe $\mathscr{C}_n$ d'une part et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

b) Les tracés des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ à la calculatrice suggèrent que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = x^2e^{-2(n+1)x} = x^2e^{-2nx-2x} = x^2e^{-2nx} \times e^{-2x} = e^{-2x}f_n(x).$$

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $-2x \leqslant 0$ et donc $e^{-2x} \leqslant 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif $f_n(x)$, on obtient $e^{-2x}f_n(x) \leqslant e^{-nx}$ ou encore $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

c) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx$ ou encore que $I_{n+1} \leqslant I_n$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

3) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel positif e^{-2nx}, on obtient $0 \leqslant x^2 e^{-nx} \leqslant e^{-2nx}$ ou encore $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$.

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-2nx}\,dx$ avec

$$\int_0^1 e^{-2nx}\,dx = \left[-\frac{1}{2n}e^{-2nx}\right]_0^1 = -\frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{e^0}{2n} = \frac{1-e^{-2n}}{2n}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1-e^{-2n}}{2n}.}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-2n} = 1$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$. En divisant, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-2n}}{2n} = 0$.

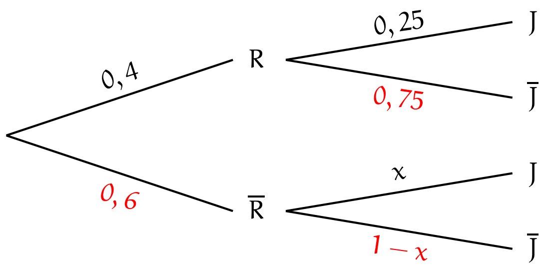
Mais alors, l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes fournissent

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 2

Partie A

1) L'énoncé fournit $P(R) = 0,4$, $P_R(J) = 0,25$, $P_{\overline{R}} = x$ et $P(J) = 0,2$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(J) = P(R) \times P_R(J) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(J),$$

ou encore

$$0,20 = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x,$$

et donc

$$x = \frac{0,2 - 0,4 \times 0,25}{0,6} = \frac{0,2 - 0,1}{0,6} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}.$$

$$\boxed{x = \frac{1}{6}.}$$

3) La probabilité demandée est $P_J(R)$.

$$P_J(R) = \frac{P(R \cap J)}{P(J)} = \frac{P(R) \times P_R(J)}{P(J)} = \frac{0,4 \times 0,25}{0,2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$$\boxed{P_J(R) = 0,5.}$$

Partie B

1) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 500 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues, « la bouteille est pur jus » avec une probabilité $p = 0,2$ et « la bouteille n'est pas pur jus » avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.

2) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 75)$. La calculatrice fournit

$$P(X \geqslant 75) = 1 - P(X \leqslant 74) = 0,998 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie C

1) Ici, $n = 900$ et $p = 0,9$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 810$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 90$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,9 - 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{900}}; 0,9 + 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{900}}\right] = [0,8804; 0,9196].$$

2) La fréquence observée est $f = \dfrac{766}{900} = 0,851$ arrondi à 10^{-3}. La fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et on peut donc penser que l'affirmation du fournisseur est fausse au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 3

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1 \Rightarrow e^{\ln(u_{n+1})} = e^{\ln(u_n)-1} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{e^{\ln(u_n)}}{e^1}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{e} \times u_n.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{1}{n+1}$. Pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 1$. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée.

D'autre part, pour tout entier naturel n,

$$w_n = 1 - \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 + \ln(n+1).$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ et en particulier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

On a fourni un exemple de suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à terme réels strictement positifs et majorée telle que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas majorée. La proposition $(\mathscr{P})$ est donc fausse.

3) • $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right| = \dfrac{1}{4}\left|\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right| = \dfrac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{8}}{4} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

• $|z_0| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|z_{n+1}| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right| |z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_n|.$$

Donc, la suite $(|z_n|)_{n\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$|z_n| = |z_0| \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{\sqrt{13}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
|z_n| \leqslant 10^{-20} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \leqslant \frac{1}{10^{20}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \geqslant \sqrt{13} \times 10^{20} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right) \geqslant \ln\left(\sqrt{13} \times 10^{20}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln(2) \geqslant \frac{\ln(13)}{2} + 20\ln(10) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(13) + 40\ln(10)}{\ln(2)} \text{ (car } \ln(2) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 136,5\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 137 \text{ (car } n \text{ est un entier)}.
\end{aligned}$$

Les entiers naturels n tels que $|z_n|$ soit inférieur ou égal à 10^{-20} sont les entiers supérieurs ou égaux à 137.

EXERCICE 4.

Partie A

1) $51 = 3 \times 17$ et $26 = 2 \times 13$. Les deux entiers 51 et 26 n'ont pas de facteur premier commun et sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $51u + 26v = 1$. Mais alors, les entiers $x = u$ et $y = -v$ sont deux entiers relatifs tels que $51x - 26y = 1$.

2) a) $51 \times (-1) - 26 \times (-2) = -51 + 52 = 1$. Le couple $(x_0, y_0) = (-1, -2)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $51x - 26y = 1$.

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$51x - 26y = 1 \Leftrightarrow 51x - 26y = 51x_0 - 26y_0 \Leftrightarrow 51\,(x - x_0) = 26\,(y - y_0)\,.$$

Si (x, y) vérifie $51x - 26y = 1$, nécessairement l'entier 26 divise l'entier $51\,(x - x_0)$. Puisque 51 et 26 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 26 divise l'entier $x - x_0$. Donc, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 26k$ ou encore $x = x_0 + 26k$. De même, il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 51k'$ ou encore $y = y_0 + 51k'$.

Soient alors k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 26k = -1 + 26k$ et $y = y_0 + 51k' = -2 + 51k'$.

$$\begin{aligned} 51x - 26y = 1 &\Leftrightarrow 51\,(x_0 + 26k) - 26\,(y_0 + 51k') = 1 \Leftrightarrow 51x_0 - 26y_0 + 51 \times 26(k - k') = 1 \Leftrightarrow 51 \times 26(k - k') = 0 \\ &\Leftrightarrow k = k'. \end{aligned}$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $51x - 26y = 1$ sont les couples de la forme $(-1 + 26k, -2 + 51k)$ où k est un entier relatif.

Partie B

1) La lettre N correspond à $x = 13$. $51x + 2 = 51 \times 13 + 2 = 665 = 125 \times 26 + 15$. Donc, $y \equiv 15\ [26]$ avec $0 \leqslant 15 \leqslant 25$. $y = 15$ correspond à la lettre P et donc

$$\boxed{\text{la lettre N est codée par la lettre P.}}$$

2) D'après la partie A, $51 \times (-1) = 1 + (-2) \times 26$. Donc $51 \times (-1) \equiv 1\ [26]$ ou encore $51 \times 25 \equiv 1\ [26]$. $a = 25$ convient.

3) $51x + 2 \equiv y\ [26] \Rightarrow 51x \equiv y - 2\ [26] \Rightarrow 51ax \equiv ay - 2a\ [26] \Rightarrow x \equiv ay - 2a\ [26]$. De plus, $2a = 50$ et donc $2a \equiv -2\ [26]$. On en déduit que

$$51x + 2 \equiv y\ [26] \Rightarrow x \equiv ay + 2\ [26].$$

Comme de plus $0 \leqslant x \leqslant 25$, x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.

4) La lettre N correspond à $y = 13$. Modulo 26,

$$ay + 2 \equiv -13 + 2 \equiv -11 \equiv 15.$$

De plus, $0 \leqslant 15 \leqslant 25$. Donc le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26 est 15. 15 correspond à la lettre P et donc

$$\boxed{\text{la lettre N code la lettre P.}}$$

5) Soit x un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 25$. Puisque $51 \equiv -1\ [26]$, $f(x) \equiv -x + 2\ [26]$ puis $f(f(x)) \equiv -(-x + 2) + 2\ [26]$ ou encore $f(f(x)) \equiv x\ [26]$.
Ainsi, si on applique deux codages successifs à une lettre donnée, on revient à la lettre de départ. Plus généralement, si on applique un nombre pair de codages successifs, on revient à la lettre de départ. En particulier, si on applique 100 fois de suite le codage f, on réobtient la lettre de départ.

