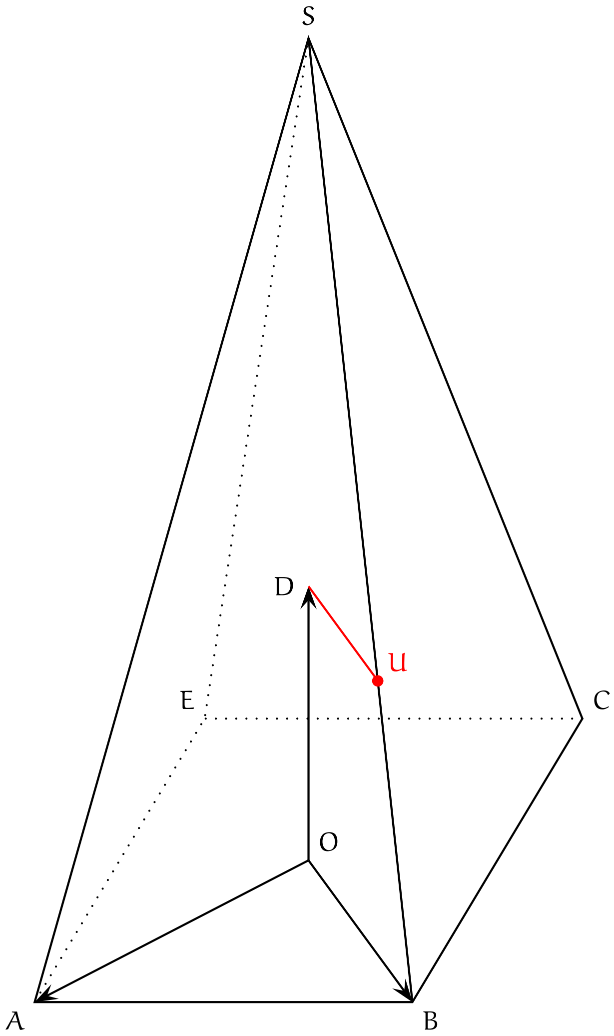
Rochambeau 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

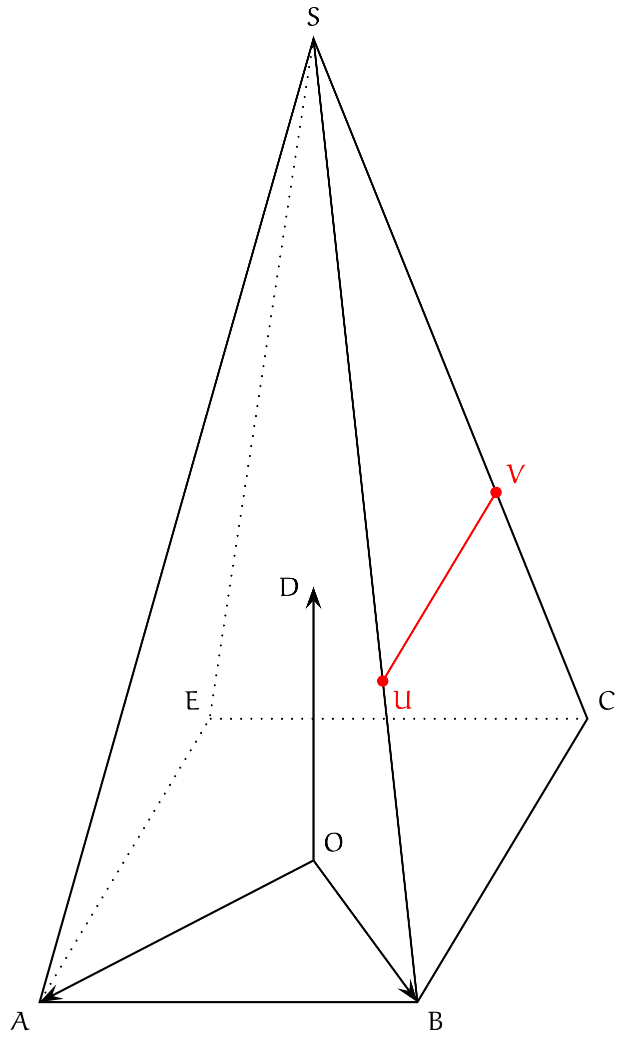
Partie A

1) Le point U est le point d'intersection de la parallèle à la droite (OB) passant par D et de la droite (SB).



2) Les points A et E ne sont pas dans le plan (BCS) et le point U est dans le plan (BCS) (car sur la droite (BS)). Donc, le plan (AEU) et le plan (BCS) sont sécants en une droite Δ passant par U. Le point V est un autre point commun aux plans (AEU) et (BCS) (car sur la droite (SC)). Donc, le point V est un autre point de Δ. On en déduit que la droite Δ est la droite (UV).

La droite (AE) est une droite du plan (AEU) et la droite (BC) est une droite du plan (BCS). Puisque les droites (AE) et (BC) sont parallèles et que les plans (AEU) et (BCS) sont sécants en la droite (UV), le théorème du toit permet d'affirmer que la droite (UV) est parallèle à la droite (BC).



3) Le point A a pour coordonnées $(1,0,0)$. D'autre part, le point E est le symétrique du point B par rapport à O et le point B a pour coordonnées $(0,1,0)$. Donc le point E a pour coordonnées $(0,-1,0)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(-1,-1,0)$. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0\right)$. On en déduit que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$ et donc que le point K appartient à la droite (AE).

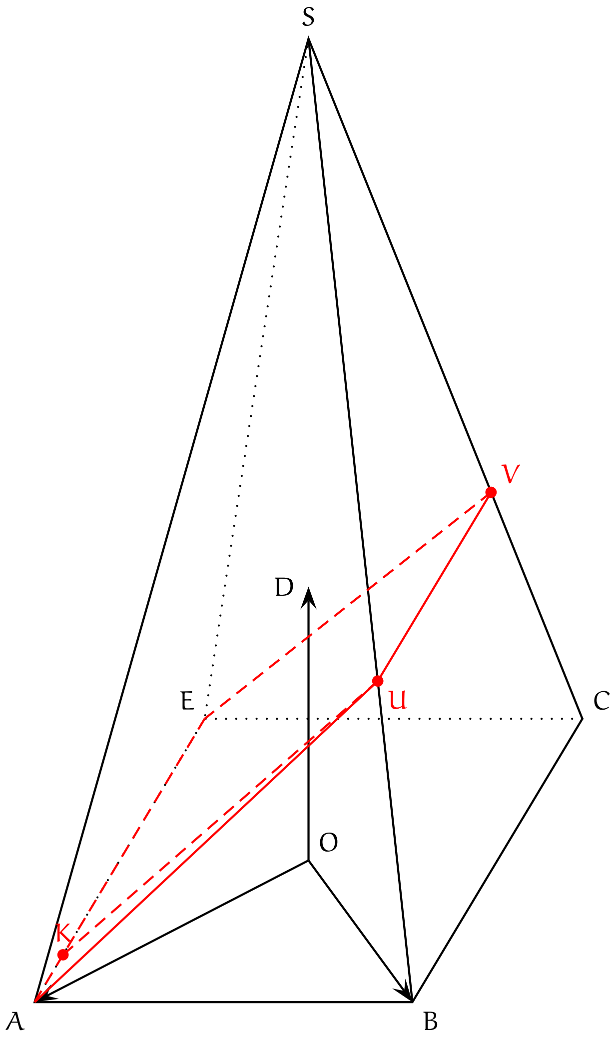
Déterminons les coordonnées du point U. Le point U est le point de la droite (SB) de côte 1. La droite (SB) est la droite passant par $S\,(0,0,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BS}\,(0,-1,3)$. Un système d'équations paramétriques de le droite (SB) est $\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=-t\\ z=3+3t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$. La côte du point de coordonnées $(0,-t,3+3t)$ est égale à 1 si et seulement si $3t+3=1$ ou encore $t=-\frac{2}{3}$. Pour $t=-\frac{2}{3}$, on obtient les coordonnées du point U :

$$U\left(0,\frac{2}{3},1\right).$$

Vérifions enfin que le vecteur $\overrightarrow{UK}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AE}$. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(-1,-1,0)$ et le vecteur $\overrightarrow{UK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{6}-0,-\frac{1}{6}-\frac{2}{3},-1\right)$ ou encore $\left(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},-1\right)$. Par suite,

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{UK}=(-1)\times\frac{5}{6}+(-1)\times\left(-\frac{5}{6}\right)+0\times(-1)=-\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=0.$$

On a montré que le point K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.



Partie B

1) Les points A, E et U ne sont pas alignés. Ils définissent donc un unique plan.

• $3x_E - 3y_E + 5z_E - 3 = 3 \times 0 - 3 \times (-1) + 5 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$. Donc le point E appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
• $3x_A - 3y_A + 5z_A - 3 = 3 \times 1 - 3 \times 0 + 5 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$. Donc le point A appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
• $3x_U - 3y_U + 5z_U - 3 = 3 \times 0 - 3 \times \dfrac{2}{3} + 5 \times 1 - 3 = -2 + 5 - 3 = 0$. Donc le point U appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

Ceci montre que le plan d'équation $3x-3y+5z-3=0$ est le plan (AEU) ou encore que le plan (AEU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

2) Un vecteur normal au plan (EAU) est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3, -3, 5)$. La droite (d) est la droite passant par $S(0, 0, 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3, -3, 5)$. Un système d'équations paramétriques de (d) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

3) Soit $M(3t, -3t, 3 + 5t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$\begin{aligned} M \in (EAU) &\Leftrightarrow 3(3t) - 3(-3t) + 5(3 + 5t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 43t + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{12}{43}. \end{aligned}$$

Quand $t = -\dfrac{12}{43}$, on obtient les coordonnées du point H : $\left(-\dfrac{36}{43}, \dfrac{36}{43}, \dfrac{69}{43}\right)$.

4) H est le projeté orthogonal de S sur le plan (EAU).

$$\begin{aligned}SH &= \sqrt{\left(0+\frac{36}{43}\right)^2+\left(0-\frac{36}{43}\right)^2+\left(3-\frac{69}{43}\right)^2} = \frac{1}{43}\sqrt{36^2+36^2+60^2} = \frac{1}{43}\sqrt{12^2\left(3^2+3^2+5^2\right)}\\ &= \frac{12\sqrt{43}}{43}.\end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $SAUEV$ est

$$\mathscr{V}_1 = \frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{43}}{18}\times\frac{12\sqrt{43}}{43} = \frac{5\times 2}{3\times 3} = \frac{10}{9}.$$

Déterminons le volume de la pyramide $SABCE$. Une diagonale du carré $ABCE$ a pour longueur 2 et donc le côté du carré $ABCE$ a pour longueur $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. L'aire du carré $ABCE$ est donc $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$ puis le volume de la pyramide $SABCE$ est

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\times 2\times 3 = 2.$$

Le volume du solide $AUVEBC$ est donc $2-\dfrac{10}{9} = \dfrac{8}{9}$. Le plan (AEU) ne partage donc pas la pyramide $SABCE$ en deux solides de même volume.

EXERCICE 2

1) a)
• $x_0 = -3$ et $y_0 = 4$. Donc, $A_0(-3; 4)$.
• $x_1 = 0,8x_0 - 0,6y_0 = 0,8(-3) - 0,6(4) = -4,8$ et $y_1 = 0,6x_0 + 0,8y_0 = 0,6(-3) + 0,8(4) = 1,4$. Donc $A_1(-4,8; 1,4)$.
• $x_2 = 0,8x_1 - 0,6y_1 = 0,8(-4,8) - 0,6(1,4) = -4,68$ et $y_2 = 0,6x_1 + 0,8y_1 = 0,6(-4,8) + 0,8(1,4) =$. Donc $A_2(-4,68; -1,76)$.

b) Algorithme complété.

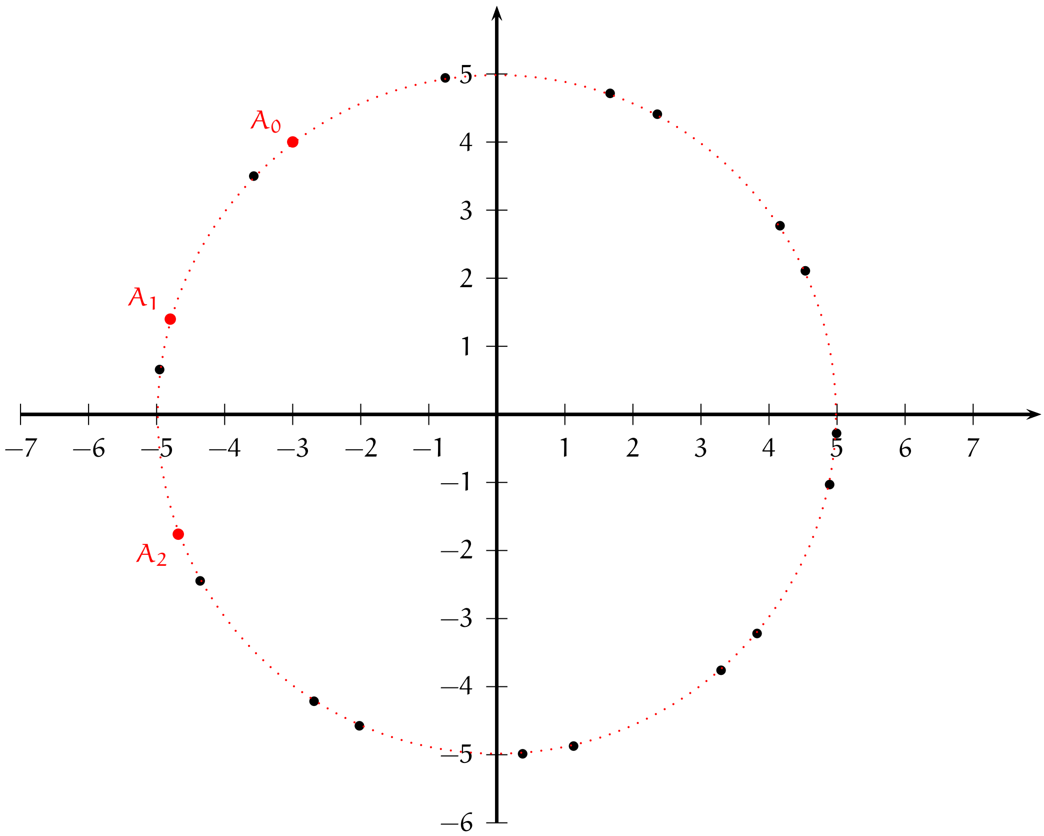
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées (x, y)
    t prend la valeur x
    x prend la valeur $0,8 \times t - 0,6 \times y$.
    y prend la valeur $0,6 \times t + 0,8 \times y$.
Fin Pour

Remarque. L'algorithme calcule les coordonnées des points A_0, ..., A_{21}.

c) Graphique.



Il semble que tous les points A_n soient sur le cercle de centre O et de rayon 5.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $|z_n| = 5$.

• $z_0 = -3 + 4i$ et donc $|z_0| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $||z_n| = 5$.

$$\begin{aligned}|z_{n+1}| &= \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} = \sqrt{(0,8x_n - 0,6y_n)^2 + (0,6x_n + 0,8y_n)^2} \\ &= \sqrt{0,64x_n^2 - 2 \times 0,8 \times 0,6x_n + 0,36y_n^2 + 0,36x_n^2 + 2 \times 0,8 \times 0,6x_n + 0,64y_n^2} \\ &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| \\ &= 5 \text{ (par hypothèse de récurrence.)}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $|z_n| = 5$ et donc que tous les points A_n soient sur le cercle de centre O et de rayon 5.

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}e^{i\theta}z_n &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n) = (0,8 + 0,6i)(x_n + iy_n) \\ &= 0,8x_n + 0,8iy_n + 0,6ix_n - 0,6y_n = (0,8x_n - 0,6y_n) + i(0,6x_n + 0,8y_n) \\ &= x_{n+1} + iy_{n+1} = z_{n+1}.\end{aligned}$$

c) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $q = e^{i\theta}$. On sait que pour tout entier naturel n,

$$z_n = z_0 \times q^n = z_0\left(e^{i\theta}\right)^n = z_0 e^{in\theta}.$$

d) Soit α un argument du nombre complexe $z_0 = -3 + 4i$. On a $|z_0| = 5$ puis

$$z_0 = 5\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 5(-0,6 + 0,8i) = 5(-\sin(\theta) + i\cos(\theta)) = 5\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

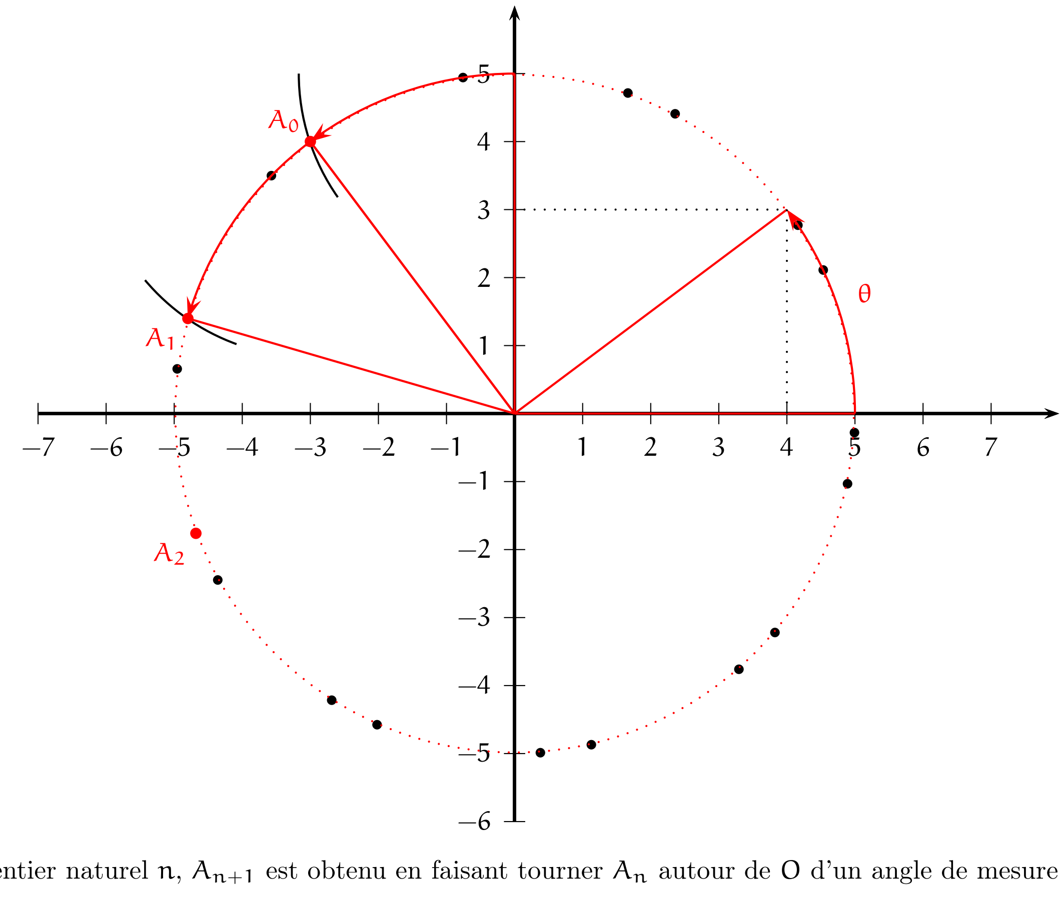
Ceci montre qu'un argument de z_0 est $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.

e) D'après les questions c) et d), pour tout entier naturel n,

$$z_n = z_0 e^{in\theta} = 5e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}e^{in\theta} = 5e^{i\left(n\theta + \theta + \frac{\pi}{2}\right)} = 5e^{i\left((n+1)\theta + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Pour tout entier naturel n, un argument de z_n est $(n+1)\theta + \dfrac{\pi}{2}$ (et le module de z_n est 5).

$5\cos(\theta) = 5 \times 0,8 = 4$ et $5\sin\theta = 5 \times 0,6 = 3$. Donc, θ est un argument de $4 + 3i$.



Pour tout entier naturel n, A_{n+1} est obtenu en faisant tourner A_n autour de O d'un angle de mesure θ dans le sens direct.

EXERCICE 3

Partie A

1) La probabilité demandée est $P(98 \leqslant X \leqslant 102)$. La calculatrice (ou le cours) fournit $P(98 \leqslant X \leqslant 102) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,95$ à 10^{-2} près.

2) Soit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-100}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centré réduite (loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1). De plus,

$$98 \leqslant X \leqslant 102 \Leftrightarrow -2 \leqslant X - 100 \leqslant 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{2}{\sigma}.$$

Par symétrie,

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) &= P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - P\left(Z \leqslant -\frac{2}{\sigma}\right) = P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - P\left(Z \geqslant \frac{2}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - \left(1 - P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right)\right) = 2P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - 1. \end{aligned}$$

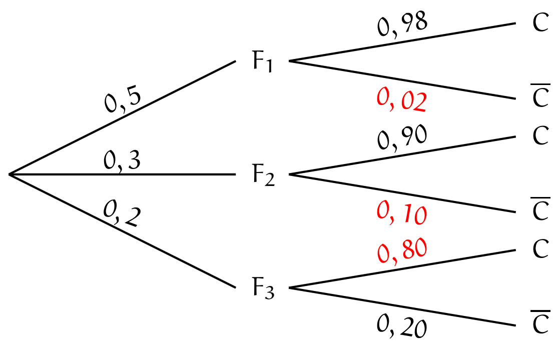
Puis,

$$P\left(98 \leqslant X \leqslant 102\right) = 0,97 \Leftrightarrow 2P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - 1 = 0,97 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0,985.$$

La calculatrice fournit $\dfrac{2}{\sigma} = 2,17009\ldots$ puis $\sigma = 0,92$ à 10^{-2} près.

Partie B

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



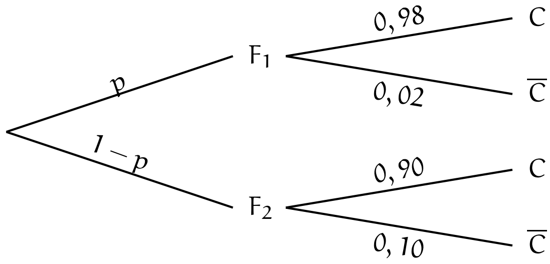
La probabilité demandée est $p_C\left(F_1\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p\left(F_1\right) \times p_{F_1}(C) + p\left(F_2\right) \times p_{F_2}(C) + p\left(F_3\right) \times p_{F_3}(C) \\ &= 0,5 \times 0,98 + 0,3 \times 0,9 + 0,2 \times (1 - 0,2) = 0,92. \end{aligned}$$

Par suite,

$$p_C\left(F_1\right) = \frac{p\left(C \cap F_1\right)}{p(C)} = \frac{p\left(F_1\right) \times p_{F_1}(C)}{p(C)} = \frac{0,5 \times 0,98}{0,92} = 0,53 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

2) Représentons de nouveau la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(C) = P(F_1) \times P_{F_1}(C) + P(F_2) \times P_{F_2}(C) = 0,98p + 0,9(1-p) = 0,08p + 0,9,$$

puis

$$P(C) = 0,92 \Leftrightarrow 0,08p + 0,9 = 0,92 \Leftrightarrow p = \frac{0,02}{0,08} \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}.$$

L'entreprise doit acheter le quart de ses fèves au fournisseur 1 et les trois quarts restant au fournisseur 2.

EXERCICE 4.

Partie A

1) La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$u'(x)=\frac{1}{x}+1.$$

La fonction u' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Autre solution. La fonction u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $]0,+\infty[$.

2) $u(2)=\ln(2)-1=-0,3\ldots$ et $u(3)=\ln(3)=1,09\ldots$. Puisque $u(2)<0$ et $u(3)>0$ et que la fonction u est continue et strictement croissante sur $[2,3]$, un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que la fonction u s'annule une fois et une seule en un certain réel α de l'intervalle $[2,3]$.

D'autre part, puisque u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, pour $x<2$, on a $u(x)<u(2)<0$ et pour $x>3$, on a $u(x)>u(3)>0$. Donc la fonction u ne s'annule pas sur $]0,2[$ et sur $]3,+\infty[$.

En résumé, la fonction u s'annule une fois et une seule sur $]0,+\infty[$, en un certain réel α élément de l'intervalle $[2,3]$.

3) Puisque u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, pour $x<\alpha$, on a $u(x)<u(\alpha)$ ou encore $u(x)<0$ et pour $x>\alpha$, $u(x)>u(\alpha)$ ou encore $u(x)>0$. Donc,

la fonction u est strictement négative sur $]0,\alpha[$, strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$ et s'annule en α.

Partie B

1) $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\frac{1}{x}=+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\ln(x)=-\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}(\ln(x)-2)=-\infty$. En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to0,\ x>0}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to0,\ x>0}f(x)=+\infty.}$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)(\ln(x)-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)+0=\frac{\ln(x)-2}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\\&=\frac{\ln(x)-2+x-1}{x^2}=\frac{\ln(x)+x-3}{x^2}=\frac{u(x)}{x^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de }]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{u(x)}{x^2}.}$$

b) Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $x^2>0$. Donc, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. Ce signe a été étudié à la question 3) de la partie A. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

Partie C

1) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}f(x)-\ln(x)&=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x)=\ln(x)-2-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{2}{x}+2-\ln(x)\\&=\frac{2-\ln(x)}{x}.\end{aligned}$$

Les abscisses des points communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les solutions de l'équation $f(x) = \ln(x)$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln(x) \Leftrightarrow f(x) - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln(x)}{x} = 0 \\
\Leftrightarrow 2 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \\
\Leftrightarrow x = e^2.
\end{aligned}$$

Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un point commun et un seul à savoir le point de coordonnées $\left(e^2, \ln\left(e^2\right)\right)$ ou encore $\left(e^2, 2\right)$.

2)

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\,dx &= \int_1^{e^2} \left(2\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) dx = \left[2\ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^{e^2} \\
&= \left(2\ln\left(e^2\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\left(e^2\right)\right)^2\right) - \left(2\ln(1) - \frac{1}{2}(\ln(1))^2\right) \\
&= 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2^2 = 2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{e^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\,dx = 2.}$$

Soit $x \leqslant e^2$. Alors, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant \ln(e^2)$ ou encore $\ln(x) \leqslant 2$ puis $2 - \ln(x) \geqslant 0$ et enfin $f(x) - \ln(x) \geqslant 0$.

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $\left[1, e^2\right]$. On en déduit que I est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^2$ d'une part, et le courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'autre part.