

# Pondichéry 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

## EXERCICE 1

### Partie A

1) Pour tout réel  $x$ ,  $1 + e^{-2x} > 1$ . En particulier, pour tout réel  $x$ ,  $1 + e^{-2x} \neq 0$ . Par suite, la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = 3 \times -\frac{(1 + e^{-2x})'}{(1 + e^{-2x})^2} = -3 \times \frac{(-2x)'e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2} = -3 \times \frac{-2e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2}.$$

Pour tout réel  $x$ ,  $\frac{6e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2} > 0$ . Ainsi, la fonction  $f'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  et donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . Par suite,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{1+0} = 3$ . On en déduit que la droite  $\Delta$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

3) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f(x) = 2,999 &\Leftrightarrow \frac{3}{1 + e^{-2x}} = 2,999 \Leftrightarrow 1 + e^{-2x} = \frac{3}{2,999} \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{3}{2,999} - 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{0,001}{2,999} \Leftrightarrow -2x = \ln\left(\frac{0,001}{2,999}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{0,001}{2,999}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2,999}{0,001}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2999). \end{aligned}$$

Donc, l'équation  $f(x) = 2,999$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  à savoir  $\alpha = \frac{1}{2} \ln(2999)$ . La calculatrice fournit  $\alpha = 4,00301\dots$  et en particulier

$$4 < \alpha < 4,01.$$

### Partie B

1) D'après la partie A, la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ . Par suite, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) < 3$  ou encore, pour tout réel  $x$ ,  $h(x) > 0$ .

2) Puisque pour tout réel  $x$ ,  $1 + e^{-2x} > 0$ , la fonction  $H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$H'(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{(1 + e^{-2x})'}{1 + e^{-2x}} = -\frac{3}{2} \times \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

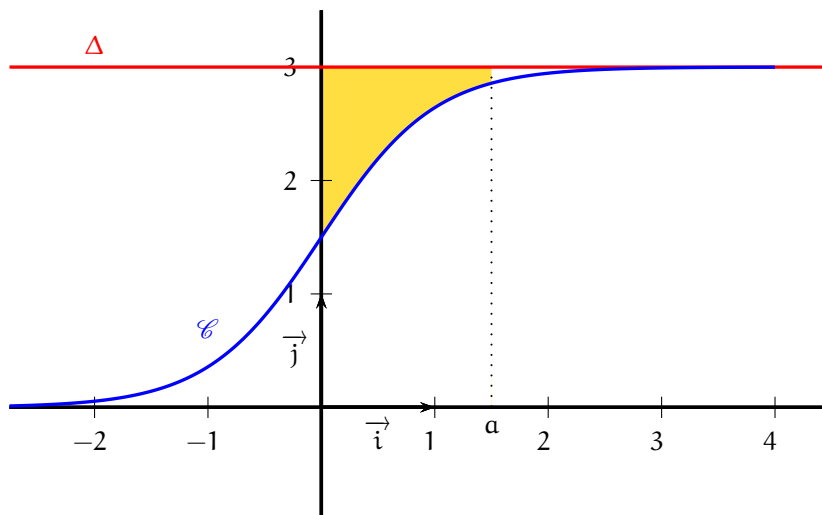
D'autre part, pour tout réel  $x$ ,

$$h(x) = 3 - \frac{3}{1 + e^{-2x}} = \frac{3 + 3e^{-2x} - 3}{1 + e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = H'(x).$$

Ceci montre que la fonction  $H$  est une primitive de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

3) Soit  $a$  un réel strictement positif.

a) La fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0, a]$  et pour tout réel  $x$  de  $[0, a]$ ,  $f(x) \leq 3$ . Par suite,  $\int_0^a h(x) dx = \int_0^a (3 - f(x)) dx$  est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\Delta$  d'une part, les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = a$  d'autre part.



$$\text{b) } \int_0^a h(x) \, dx = [H(x)]_0^a = \left(-\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2a})\right) - \left(-\frac{3}{2} \ln(1 + e^0)\right) = \frac{3}{2} (\ln(2) - \ln(1 + e^{-2a})) = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right).$$

c) L'aire demandée est  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a h(x) \, dx$ . Or,  $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-2a} = 0$  et donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a h(x) \, dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1+0}\right) = \frac{3 \ln(2)}{2}.$$

L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}$  est égale à  $\frac{3 \ln(2)}{2}$ .

## EXERCICE 2

### Partie A

1) Soit  $n$  un entier naturel.

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a} = au_n + \frac{b - ab - b}{1-a} \\ &= au_n - \frac{ab}{1-a} = a \left( u_n - \frac{b}{1-a} \right) \\ &= av_n.\end{aligned}$$

Donc la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $a$ .

2) Si  $a \in ]-1, 1[$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{1-a} + v_n \right) = \frac{b}{1-a}$ .

### Partie B

1) Quand Max rentre chez lui, il enlève à la plante le quart de sa hauteur. La plante ne mesure plus que  $80 - \frac{1}{4} \times 80 = 60$  cm. Entre mars 2015 et mars 2016, la plante pousse de 30 cm. En mars 2016, la plante mesure donc  $60 + 30 = 90$  cm.

En mars 2016, la plante mesure 90 cm.

2) a) En mars de l'année 2015 +  $n$ , la plante a une hauteur de  $h_n$  cm. Max enlève alors à la plante le quart de sa hauteur. Celle-ci ne mesure plus que  $h_n - \frac{h_n}{4} = \frac{3h_n}{4} = 0,75h_n$ . Puis, entre mars de l'année 2015 +  $n$  et mars de l'année 2015 +  $n + 1$ , la plante pousse de 30 cm. En mars 2015 +  $n + 1$ , sa hauteur en cm est donc

$$h_{n+1} = 0,75h_n + 30.$$

b) La calculatrice fournit  $h_0 = 80$ ,  $h_1 = 90$ ,  $h_2 = 97,5$ ,  $h_3 = 103,125$ . Il semblerait que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit strictement croissante.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $h_{n+1} - h_n > 0$ .

- $h_1 - h_0 = 10 > 0$ . L'inégalité à démontrer est donc vraie quand  $n = 0$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $h_{n+1} - h_n > 0$  et montrons que  $h_{n+2} - h_{n+1} > 0$ .

$$\begin{aligned}h_{n+2} - h_{n+1} &= (0,75h_{n+1} + 30) - (0,75h_n + 30) = 0,75h_{n+1} - 0,75h_n \\ &= 0,75(h_{n+1} - h_n) > 0 \text{ (par hypothèse de récurrence)}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $h_{n+1} - h_n > 0$  ou encore que pour tout entier naturel  $n$ ,  $h_{n+1} > h_n$ . La suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

c) On applique la partie A avec  $a = 0,75$  et  $b = 30$ .  $a \in ]-1, 1[$  et donc la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \frac{30}{1 - 0,75} = 120.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 120.$

### EXERCICE 3

#### Partie A

1) a) Puisque  $\frac{64 + 104}{2} = 84 = \mu$ , les deux nombres 64 et 104 sont symétriques par rapport à  $\mu$ . On en déduit que

$$P(64 \leq X \leq 104) = 1 - P(X \leq 64) - P(X \geq 104) = 1 - 2P(X \leq 64) = 1 - 2 \times 0,16 = 0,68.$$

$$P(64 \leq X \leq 104) = 0,68.$$

b) D'après le cours,  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$ . On peut donc proposer  $\sigma = \mu - 64 = 20$ .

$$\sigma = 20 \text{ à } 1 \text{ près.}$$

2) a) On sait que la variable aléatoire  $Z$  suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b)  $X \leq 64 \Leftrightarrow X - 84 \leq -20 \Leftrightarrow \frac{X - 84}{\sigma} \leq -\frac{20}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leq -\frac{20}{\sigma}$ . Les événements  $X \leq 64$  et  $Z \leq -\frac{20}{\sigma}$  se produisent simultanément. Donc

$$P(X \leq 64) = P\left(Z \leq -\frac{20}{\sigma}\right).$$

c) La calculatrice fournit

$$P(X \leq 64) = 0,16 \Leftrightarrow P\left(Z \leq -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,16 \Leftrightarrow -\frac{20}{\sigma} = -0,9944\dots \Leftrightarrow \sigma = \frac{20}{0,9944\dots} \\ \Leftrightarrow \sigma = 20,1114\dots$$

$$\sigma = 20,111 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

3) a) La probabilité demandée est  $P(24 \leq X \leq 60)$ . La calculatrice fournit

$$P(24 \leq X \leq 60) = 0,115 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

b) La probabilité demandée est  $P(X \geq 120)$  ou encore  $1 - P(X \leq 120)$ . La calculatrice fournit

$$P(X \leq 120) = 0,037 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

#### Partie B

1) a) Notons  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de clients faisant jouer l'extension de garantie. La variable  $Y$  suit une loi binomiale. En effet,

- 12 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux éventualités à savoir « le client fait jouer l'extension de garantie » avec une probabilité  $p = 0,115$  et « le client ne fait pas jouer l'extension de garantie » avec une probabilité  $1 - p = 0,885$ .

La variable  $Y$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 12$  et  $p = 0,115$ .

La probabilité demandée est  $P(Y = 3)$ . La calculatrice fournit

$$P(Y = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times 0,885^9 = 0,111 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

b) La probabilité demandée est  $P(Y \geq 6)$ . La calculatrice fournit

$$P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) = 0,001 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) Dans cette question,  $Y$  désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise.

a) La variable  $Y$  prend deux valeurs : 65 euros si la panne est réparable et  $65 - 399 = -334$  euros si la panne est irréparable. La loi de probabilité de  $Y$  est

$$P(Y = -334) = 0,115 \quad \text{et} \quad P(Y = 65) = 0,885.$$

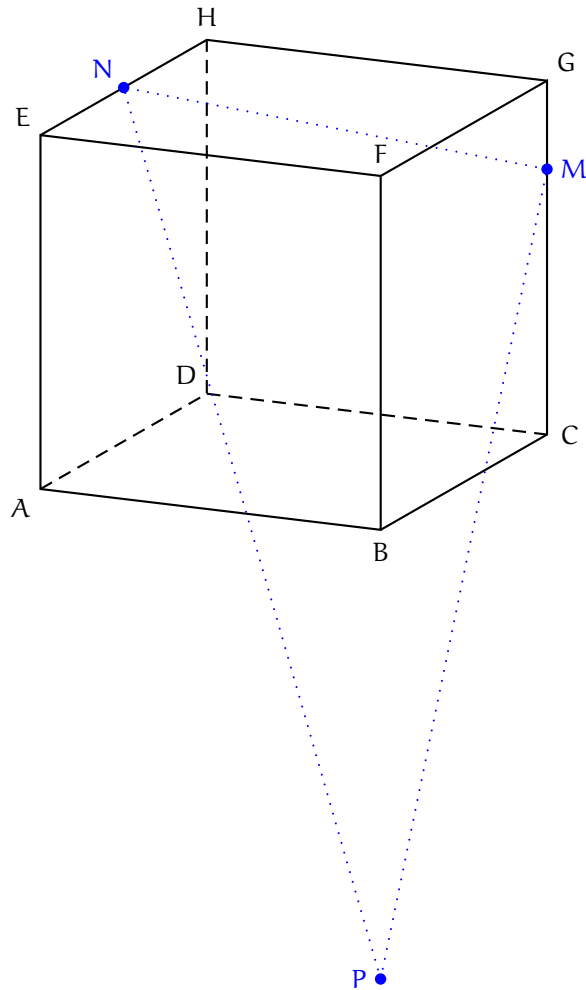
b) L'espérance de la variable  $Y$  est

$$E(Y) = 0,115 \times (-334) + 0,885 \times 65 = 19,115.$$

L'entreprise gagne donc en moyenne 19,115 euros par client ayant pris l'extension de garantie. Puisque cette espérance est strictement positive, cette offre d'extension de garantie est financièrement avantageuse pour l'entreprise.

## EXERCICE 4.

### 1) Figure.



2) Le vecteur  $\overrightarrow{MN}$  a pour coordonnées  $\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  et le vecteur  $\overrightarrow{MP}$  a pour coordonnées  $(0, -1, -2)$ .

S'il existe un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$ , en analysant la première coordonnée, on a  $-1 = 0 \times k$  ce qui est impossible. Donc, les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{MP}$  ne sont pas colinéaires ou encore les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  ne sont pas alignés.

3) a)  $d$  prend la valeur  $-1$ ,  $e$  prend la valeur  $-\frac{1}{2}$ ,  $f$  prend la valeur  $\frac{1}{4}$ ,  $g$  prend la valeur  $0$ ,  $h$  prend la valeur  $-1$  et  $i$  prend la valeur  $-2$ .

$k$  prend la valeur  $(-1) \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \frac{1}{4} \times (-2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ .

L'algorithme affiche 0.

b) L'algorithme affiche le produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{MP}$ . Ici, ce produit scalaire est nul et donc le triangle  $MNP$  est rectangle en  $M$ .

4) Algorithme complété.

```

Saisir  $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$ 
d prend la valeur  $x_N - x_M$ 
e prend la valeur  $y_N - y_M$ 
f prend la valeur  $z_N - z_M$ 
g prend la valeur  $x_P - x_M$ 
h prend la valeur  $y_P - y_M$ 
i prend la valeur  $z_P - z_M$ 
k prend la valeur  $d \times g + e \times h + f \times i$ 
afficher k
l prend la valeur  $(d^2 + e^2 + f^2) - (g^2 + h^2 + i^2)$ 
afficher l
Si  $k = 0$  et  $l = 0$ ,
    afficher « le triangle MNP est rectangle et isocèle en M »
sinon
    afficher « le triangle MNP n'est pas rectangle et isocèle en M »
Fin si

```

5) a) Le plan (MNP) est le plan passant par  $M\left(1, 1, \frac{3}{4}\right)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(5, -8, 4)$ . Une équation cartésienne du plan (MNP) est

$$5 \times (x - 1) - 8 \times (y - 1) + 4 \times \left(z - \frac{3}{4}\right) = 0,$$

ou encore

une équation cartésienne du plan (MNP) est  $5x - 8y + 4z = 0$ .

b)  $\Delta$  est la droite passant par  $F(1, 0, 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{n}(5, -8, 4)$ . Une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  est donc

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

6) a) Soit  $Q(1 + 5t, -8t, 1 + 4t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de  $\Delta$ .

$$Q \in (\text{MNP}) \Leftrightarrow 5(1 + 5t) - 8(-8t) + 4(1 + 4t) = 0 \Leftrightarrow 105t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{9}{105} \Leftrightarrow t = -\frac{3}{35}.$$

Quand  $t = -\frac{3}{35}$ , on obtient les coordonnées du point K à savoir  $\left(\frac{20}{35}, \frac{24}{35}, \frac{23}{35}\right)$  ou encore  $\left(\frac{4}{7}, \frac{24}{35}, \frac{23}{35}\right)$ .

b) [FK] est la hauteur du tétraèdre MNPF issue de F. D'autre part, puisque le triangle MNP est rectangle en M, l'aire de ce triangle est  $\mathcal{A} = \frac{MN \times MP}{2}$ .

$$MN = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$$

et

$$MP = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Le volume du tétraèdre MNPF est donc

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times FK = \frac{1}{3} \times \frac{\frac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5}}{2} \times \sqrt{\frac{27}{35}} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} \sqrt{\frac{3 \times 7 \times 5 \times 3 \times 9}{5 \times 7}} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{3}{8}.$$

Le volume  $\mathcal{V}$  du tétraèdre MNPF est  $\mathcal{V} = \frac{3}{8}$ .