Pondichéry 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour tout réel x, $1+e^{-2x} > 1$. En particulier, pour tout réel x, $1+e^{-2x} \neq 0$. Par suite, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = 3 \times -\frac{\left(1+e^{-2x}\right)'}{\left(1+e^{-2x}\right)^2} = -3 \times \frac{(-2x)'e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2} = -3 \times \frac{-2e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2} = \frac{6e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}.$$

Pour tout réel x, $\dfrac{6e^{-2x}}{\left(1+e^{-2x}\right)^2} > 0$. Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{1+0} = 3$. On en déduit que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) = 2,999 &\Leftrightarrow \frac{3}{1+e^{-2x}} = 2,999 \Leftrightarrow 1+e^{-2x} = \frac{3}{2,999} \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{3}{2,999} - 1 \\
&\Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{0,001}{2,999} \Leftrightarrow -2x = \ln\left(\frac{0,001}{2,999}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{0,001}{2,999}\right) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2,999}{0,001}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(2999).
\end{aligned}$$

Donc, l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ à savoir $\alpha = \dfrac{1}{2}\ln(2999)$. La calculatrice fournit $\alpha = 4,00301\ldots$ et en particulier

$$\boxed{4 < \alpha < 4,01.}$$

Partie B

1) D'après la partie A, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. Par suite, pour tout réel x, $f(x) < 3$ ou encore, pour tout réel x, $h(x) > 0$.

2) Puisque pour tout réel x, $1+e^{-2x} > 0$, la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$H'(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{\left(1+e^{-2x}\right)'}{1+e^{-2x}} = -\frac{3}{2} \times \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

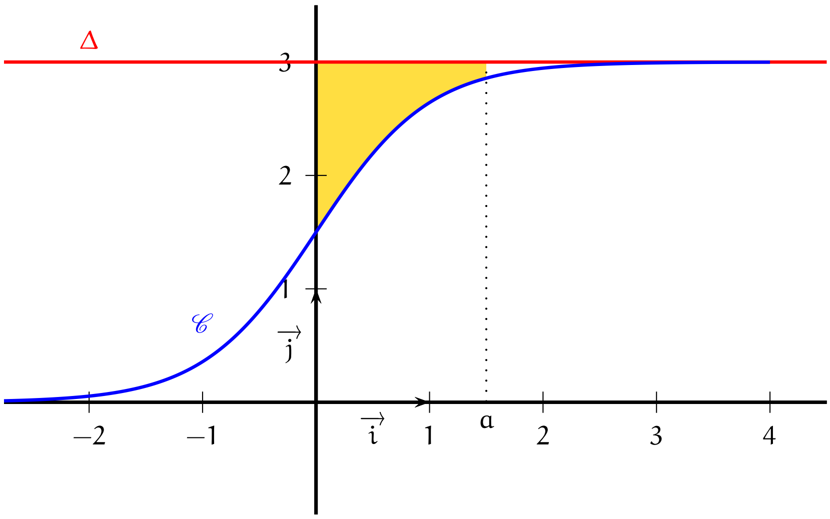
D'autre part, pour tout réel x,

$$h(x) = 3 - \frac{3}{1+e^{-2x}} = \frac{3+3e^{-2x}-3}{1+e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = H'(x).$$

Ceci montre que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3) Soit a un réel strictement positif.

a) La fonction f est continue sur le segment $[0, a]$ et pour tout réel x de $[0, a]$, $f(x) \leqslant 3$. Par suite, $\displaystyle\int_0^a h(x)\,dx = \int_0^a (3-f(x))\,dx$ est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.



b) $\displaystyle\int_0^a h(x)\ dx = [H(x)]_0^a = \left(-\frac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2a}\right)\right) - \left(-\frac{3}{2}\ln\left(1+e^{0}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\ln(2) - \ln\left(1+e^{-2a}\right)\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

c) L'aire demandée est $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a h(x)\ dx$. Or, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} e^{-2a} = 0$ et donc

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a h(x)\ dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+0}\right) = \frac{3\ln(2)}{2}.$$

L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ est égale à $\dfrac{3\ln(2)}{2}$.

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n + \frac{b-ab-b}{1-a} \\ &= au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \\ &= av_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

2) Si $a \in]-1,1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{b}{1-a} + v_n\right) = \frac{b}{1-a}$.

Partie B

1) Quand Max rentre chez lui, il enlève à la plante le quart de sa hauteur. La plante ne mesure plus que $80 - \frac{1}{4} \times 80 = 60$ cm. Entre mars 2015 et mars 2016, la plante pousse de 30 cm. En mars 2016, la plante mesure donc $60 + 30 = 90$ cm.

$$\boxed{\text{En mars 2016, la plante mesure } 90 \text{ cm.}}$$

2) a) En mars de l'année $2015 + n$, la plante a une hauteur de h_n cm. Max enlève alors à la plante le quart de sa hauteur. Celle-ci ne mesure plus que $h_n - \frac{h_n}{4} = \frac{3h_n}{4} = 0,75h_n$. Puis, entre mars de l'année $2015 + n$ et mars de l'année $2015 + n + 1$, la plante pousse de 30 cm. En mars $2015 + n + 1$, sa hauteur en cm est donc

$$h_{n+1} = 0,75h_n + 30.$$

b) La calculatrice fournit $h_0 = 80$, $h_1 = 90$, $h_2 = 97,5$, $h_3 = 103,125$. Il semblerait que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $h_{n+1} - h_n > 0$.

- $h_1 - h_0 = 10 > 0$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $h_{n+1} - h_n > 0$ et montrons que $h_{n+2} - h_{n+1} > 0$.

$$\begin{aligned} h_{n+2} - h_{n+1} &= (0,75h_{n+1} + 30) - (0,75h_n + 30) = 0,75h_{n+1} - 0,75h_n \\ &= 0,75\,(h_{n+1} - h_n) > 0 \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $h_{n+1} - h_n > 0$ ou encore que pour tout entier naturel n, $h_{n+1} > h_n$. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

c) On applique la partie A avec $a = 0,75$ et $b = 30$. $a \in]-1,1[$ et donc la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = \frac{30}{1-0,75} = 120.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} h_n = 120.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1) a) Puisque $\dfrac{64+104}{2} = 84 = \mu$, les deux nombres 64 et 104 sont symétriques par rapport à μ. On en déduit que

$$P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - P(X \leqslant 64) - P(X \geqslant 104) = 1 - 2P(X \leqslant 64) = 1 - 2 \times 0,16 = 0,68.$$

$$\boxed{P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 0,68.}$$

b) D'après le cours, $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$. On peut donc proposer $\sigma = \mu - 64 = 20$.

$$\boxed{\sigma = 20 \text{ à 1 près.}}$$

2) a) On sait que la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b) $X \leqslant 64 \Leftrightarrow X - 84 \leqslant -20 \Leftrightarrow \dfrac{X-84}{\sigma} \leqslant -\dfrac{20}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}$. Les événements $X \leqslant 64$ et $Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}$ se produisent simultanément. Donc

$$P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right).$$

c) La calculatrice fournit

$$P(X \leqslant 64) = 0,16 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,16 \Leftrightarrow -\frac{20}{\sigma} = -0,9944\ldots \Leftrightarrow \sigma = \frac{20}{0,9944\ldots}$$
$$\Leftrightarrow \sigma = 20,1114\ldots$$

$$\boxed{\sigma = 20,111 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

3) a) La probabilité demandée est $P(24 \leqslant X \leqslant 60)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(24 \leqslant X \leqslant 60) = 0,115 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

b) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 120)$ ou encore $1 - P(X \leqslant 120)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(X \leqslant 120) = 0,037 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

Partie B

1) a) Notons Y la variable aléatoire égale au nombre de clients faisant jouer l'extension de garantie. La variable Y suit une loi binomiale. En effet,

- 12 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux éventualités à savoir « le client fait jouer l'extension de garantie » avec une probabilité $p = 0,115$ et « le client ne fait pas jouer l'extension de garantie » avec une probabilité $1 - p = 0,885$.

La variable Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,115$.

La probabilité demandée est $P(Y = 3)$. La calculatrice fournit

$$P(Y = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times 0,885^9 = 0,111 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

b) La probabilité demandée est $P(Y \geqslant 6)$. La calculatrice fournit

$$P(Y \geqslant 6) = 1 - P(Y \leqslant 5) = 0,001 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) Dans cette question, Y désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise.

a) La variable Y prend deux valeurs : 65 euros si la panne est réparable et $65 - 399 = -334$ euros si la panne est irréparable. La loi de probabilité de Y est

$$P(Y = -334) = 0,115 \quad \text{et} \quad P(Y = 65) = 0,885.$$

b) L'espérance de la variable Y est

$$E(Y) = 0,115 \times (-334) + 0,885 \times 65 = 19,115.$$

L'entreprise gagne donc en moyenne $19,115$ euros par client ayant pris l'extension de garantie. Puisque cette espérance est strictement positive, cette offre d'extension de garantie est financièrement avantageuse pour l'entreprise.

EXERCICE 4.

1) b divise a. Donc il existe un entier k tel que $a = kb$. c divise a ou encore c divise kb. De plus, c est premier à b. D'après le théorème de GAUSS, c divise k. Par suite, il existe un entier k' tel que $k = k'c$. Mais alors $a = k'bc$. Puisque k' est un entier, ceci montre que bc divise a.

2) a) Puisque les entiers 3 et 4 sont premiers entre eux, si 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$, la question 1) montre que $12 = 3 \times 4$ doit diviser $2^{33} - 1$ ce qui ne semble pas être le cas.

b) Un multiple de 4 est en particulier un nombre pair. Mais 2^{33} est un nombre pair et donc $2^{33} - 1$ est un nombre impair. Donc $2^{33} - 1$ n'est pas un multiple de 4 ou encore 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

c) Puisque $2 \equiv -1$ [3], on en déduit que $2^{33} - 1 \equiv (-1)^{33} - 1$ [3] ou encore $2^{33} - 1 \equiv -2$ [3]. En particulier, $2^{33} - 1$ n'est pas congru à 0 modulo 3 ou encore $2^{33} - 1$ n'est pas un multiple de 3 ou enfin 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

d) Puisque $2^3 \neq 1$,

$$S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \ldots + \left(2^3\right)^{10} = \frac{\left(2^3\right)^{11} - 1}{2^3 - 1} = \frac{2^{33} - 1}{7}.$$

e) Ainsi, $\dfrac{2^{33} - 1}{7}$ est un entier et donc 7 divise $2^{33} - 1$.

3) On sait qu'un entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier si et seulement si cet entier n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée.
$\sqrt{2^7 - 1} = \sqrt{127} = 11, \ldots$ Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{2^7 - 1}$ sont 2, 3, 5, 7 et 11 et $2^7 - 1 = 127$.

- 127 est impair et donc 127 n'est pas divisible par 2.
- La somme des chiffres de 127, à savoir 10, n'est pas divisible par 3 et donc 127 n'est pas divisible par 3.
- Le chiffre des unités de 127 n'est ni 0, ni 5, et donc 127 n'est pas divisble par 5.
- $\dfrac{127}{7} = 18, 1 \ldots$ n'est pas un entier et donc 127 n'est pas divisble par 7.
- $\dfrac{127}{11} = 11, 5 \ldots$ n'est pas un entier et donc 127 n'est pas divisble par 11.

On a montré que $2^7 - 1$ est un nombre premier.

4) a) Le nombre $2^{33} - 1$ n'est divisible ni par 2 (car $2^{33} - 1$ est impair, ni par 3 (d'après 2)c)), ni par 5 (car, modulo 5, $2^{33} - 1 = 2 \times 4^{16} - 1 \equiv 2 \times (-1)^{16} - 1 = 1$) et donc n'est divisible par aucun des entiers 2, 3, 4, 5, 6. D'autre part, $2^{33} - 1$ est divisible par 7 (d'après 2)e)). Enfin, $7 < \sqrt{2^{33} - 1}$. Ainsi, si $n = 33$, l'algorithme affiche 7 puis CAS 2.

D'après la question 3), le nombre $2^7 - 1$ est premier. Donc, $2^7 - 1$ n'est divisible par aucun des entiers k inférieurs ou égaux à $\sqrt{2^7 - 1} = 11, \ldots$. Ainsi, si $n = 7$, l'algorithme affiche 12 qui est le premier entier strictement supérieur à $\sqrt{2^7 - 1}$ puis CAS 2.

b) Le CAS 2 est le cas où le nombre de MERSENNE étudié n'est pas premier. Le nombre k affiché est le plus petit diviseur supérieur ou égal à 2 de ce nombre de MERSENNE.

c) Le CAS 1 est le cas où le nombre de MERSENNE étudié est premier.

