Polynésie 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AK}$. Donc, les coordonnées du point G sont $(6, 4, 2)$.
D'autre part, les coordonnées respectives des points I et J sont $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IG}$ sont $(5, 4, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{JG}$ sont $(6, 3, 2)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{JG} = k\overrightarrow{IG}$, alors $k = 1$ (à partir de la troisième coordonnée) et aussi $k = \dfrac{3}{4}$ (à partir de la deuxième coordonnée. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{JG}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points I, J et G ne sont pas alignés. On en déduit que les points I, J et G définissent un unique plan.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IG} = 2 \times 5 + 2 \times 4 + (-9) \times 2 = 10 + 8 - 18 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JG} = 2 \times 6 + 2 \times 3 + (-9) \times 2 = 12 + 6 - 18 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{JG}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJG). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (IJG).

2) Le plan (IJG) est le plan passant par $I(1, 0, 0)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, 2, -9)$. Une équation du plan (IJG) est donc

$$2(x - 1) + 2(y - 0) - 9(z - 0) = 0$$

ou encore $2x + 2y - 9z - 2 = 0$.

3) $\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AI}$ et donc les coordonnées du point B sont $(6, 0, 0)$.
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AK}$ et donc les coordonnées du point F sont $(6, 0, 2)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BF}$ sont donc $(0, 0, 2)$.

La droite (BF) est la droite passant par $B(6, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF}(0, 0, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite (BF) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

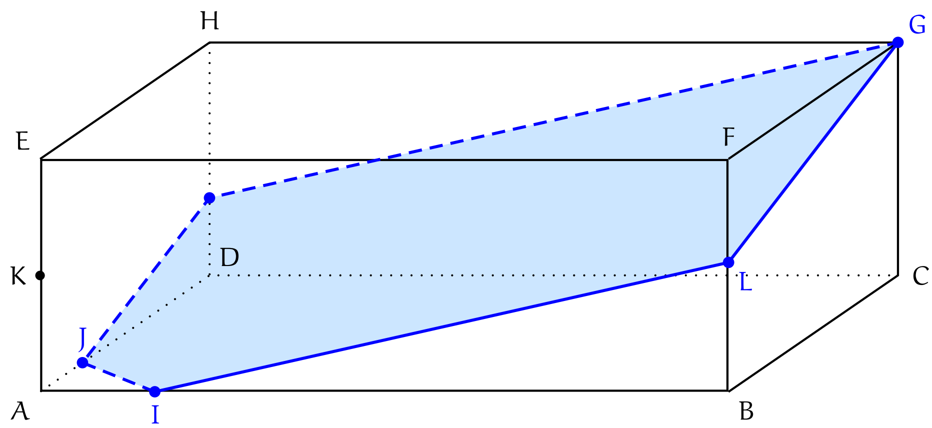
Soit $M(6, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (BF).

$$M \in (IJG) \Leftrightarrow 2 \times 6 + 2 \times 0 - 9 \times t - 2 = 0 \Leftrightarrow 10 - 9t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{9}.$$

Pour $t = \dfrac{10}{9}$, on obtient les coordonnées du point L :

$$\boxed{L\left(6, 0, \frac{10}{9}\right).}$$

4) Graphique. (La droite d'inetrsection des plans (IJG) et (DCH) est parallèle à la droite (IL)).



EXERCICE 2

1) Soit M un point du plan d'affixe z.

$$\begin{aligned} M \text{ invariant} \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z^2 + 4z + 3 = z \\ \Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $z^2 + 3z + 3 = 0$ est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$. Donc l'équation $z^2 + 3z + 3 = 0$ admet deux solutions complexes non réelles conjuguées $z_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$.

Donc, il existe exactement deux points invariants, le point M_1 d'affixe $z_1 = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Déterminons la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

$|z_1| = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$ puis

$$z_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

D'autre part, $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$.

$$\boxed{z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}.}$$

2) On sait déjà que $OA = |z_A| = |z_2| = \sqrt{3}$ et $OB = |z_B| = |z_1| = \sqrt{3}$. Enfin,

$$AB = |z_B - z_A| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}|i| = \sqrt{3}.$$

En résumé, $OA = OB = AB = \sqrt{3}$ et donc le triangle OAB est équilatéral.

3) Soient x et y deux réels puis $z = x + iy$.

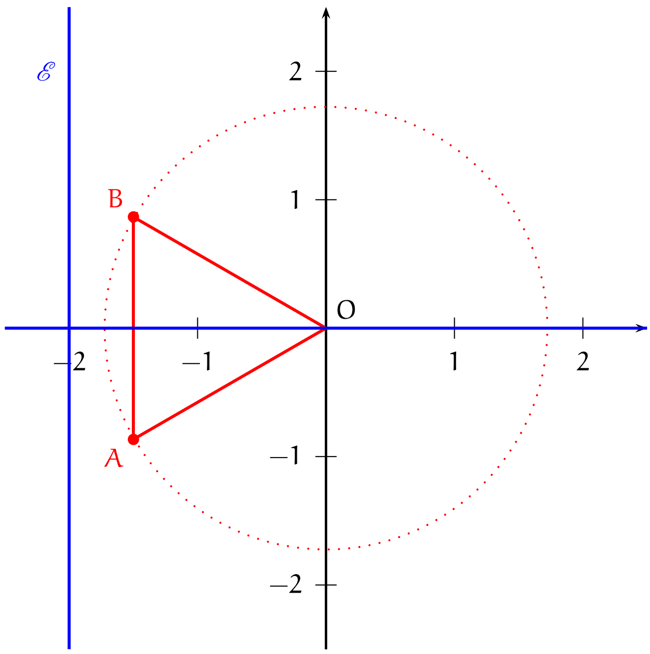
$$\begin{aligned} z' &= z^2 + 4z + 3 = (x + iy)^2 + 4(x + iy) + 3 = x^2 + 2ixy - y^2 + 4x + 4iy + 3 \\ &= x^2 - y^2 + 4x + 3 + 2iy(x + 2). \end{aligned}$$

Par suite,

$$M' \in (Ox) \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}\,(z') = 0 \Leftrightarrow y(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } y = 0.$$

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est la réunion des droites d'équation respectives } x = -2 \text{ et } y = 0.}$$

4) Graphique.



EXERCICE 3

1) La probabilité demandée est $P(153 \leqslant X_1 \leqslant 177) = P\left(\mu_1 - 2\sigma_1 \leqslant X_1 \leqslant \mu_1 + 2\sigma_1\right)$. La calculatrice (ou le cours) fournit

$$\boxed{P(153 \leqslant X_1 \leqslant 177) = 0,95 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

2) a) La probabilité demandée est $P(X_2 \geqslant 170) = 1 - P(X_2 \leqslant 170)$. La calculatrice fournit

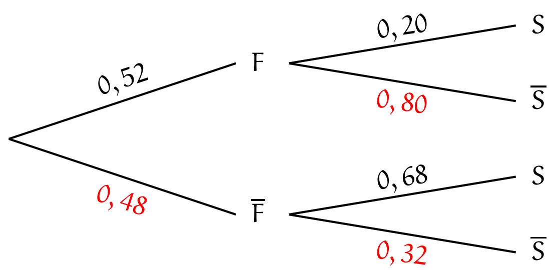
$$\boxed{P(X_2 \geqslant 170) = 0,68 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

b) De même, la probabilité qu'une femme choisie au hasard mesure plus de $1,70$ m est $P\left(X_1 \geqslant 170\right) = 1 - P\left(X_1 \leqslant 170\right) = 0,20$ arrondi à 10^{-2}.

Notons F l'événement « la personne choisie est une femme » et S l'événement « la personne choisie mesure plus de $1,70$ m ». Ainsi, on a

$$P_F(S) = 0,20 \text{ et } P_{\overline{F}}(S) = 0,68.$$

Représentons la situation par un arbre de probabilité.



La probabilité demandée est $P_S(F)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(F) \times P_F(S) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(S) = 0,52 \times 0,20 + (1 - 0,52) \times 0,68 = 0,4304.$$

Mais alors,

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{P(F) \times P_F(S)}{P(S)} = \frac{0,52 \times 0,2}{0,4304} = 0,24 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

$$\boxed{P_S(F) = 0,24 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

EXERCICE 4.

Partie A

1) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est $f'(1)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est horizontale si et seulement si $f'(1) = 0$.

La fonction f est dérivable sur $[1, 8]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[1, 8]$ et pour tout réel x de $[1, 8]$,

$$f'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times \left(-e^{-x}\right) = (a - (ax + b))e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}.$$

Par suite,

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (-a + a - b)e^{-1} = 0 \Leftrightarrow -be^{-1} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

$$\boxed{b = 0.}$$

2) Pour tout réel x de $[1, 8]$, $f(x) = axe^{-x}$. La condition de l'énoncé s'écrit $3,5 \leqslant f(1) \leqslant 4$ avec $f(1) = ae^{-1} = \dfrac{a}{e}$.

$$\begin{aligned} 3,5 \leqslant f(1) \leqslant 4a &\Leftrightarrow 3,5 \leqslant \frac{a}{e} \leqslant 4 \Leftrightarrow 3,5e \leqslant a \leqslant 4e \text{ (car } e > 0) \\ &\Leftrightarrow 9,5\ldots \leqslant a \leqslant 10,8\ldots \\ &\Leftrightarrow a = 10 \text{ (car } a \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = 10.}$$

Partie B

1) La fonction g est dérivable sur $[1, 8]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[1, 8]$ et pour tout réel x de $[1, 8]$,

$$g'(x) = 10\left[(-1) \times e^{-x} + (-x - 1) \times \left(-e^{-x}\right)\right] = 10\left(-e^{-x} + (x + 1)e^{-x}\right) = 10xe^{-x} = f(x).$$

La fonction g est donc une primitive de la fonction f sur $[1, 8]$.

2) L'unité d'aire est le mètre carré. Puisque la fonction f est continue et positive sur $[1, 8]$, l'aire du mur de soutènement exprimée en mètre carré est

$$\mathscr{A} = \int_1^8 f(x)\,dx = [g(x)]_1^8 = 10\left((-8 - 1)e^{-8}\right) - 10(-1 - 1)e^{-1} = 20e^{-1} - 90e^{-8}.$$

Le prix total en euros à payer est

$$300 + 50\left(20e^{-1} - 90e^{-8}\right) = 300 + 1000e^{-1} - 4500e^{-8} = 666,3\ldots$$

Le devis de l'artiste sera de 670 euros.

Partie C

1) La fonction f' est dérivable sur $[1, 8]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[1, 8]$ et pour tout réel x de $[1, 8]$,

$$(f')'(x) = 10\left((-1)e^{-x} + (1 - x) \times \left(-e^{-x}\right)\right) = 10(-1 - 1 + x)e^{-x} = 10(x - 2)e^{-x}.$$

Pour tout réel x de $[1, 8]$, $10e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x de $[1, 8]$, $(f')'(x)$ est du signe de $x - 2$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f'.

<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>$(f')'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>f'</td><td>0</td><td>↘</td><td>$-10e^{-2}$</td><td>↗</td><td>$-70e^{-8}$</td></tr>
</table>

2) $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en M. Cette tangente est la droite ML. Donc, $|f'(x)|$ est la valeur absolue du coefficient directeur de la droite (ML) à savoir $\dfrac{PM}{PL}$.
D'autre part, dans le triangle MPL, rectangle en P, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{PM}{PL}$. Finalement

$$\boxed{\tan(\alpha) = |f'(x)|.}$$

3) Pour tout réel x de $[1, 8]$, $1 - x \leqslant 0$ puis $10(1 - x)e^{-x} \leqslant 0$ ou encore $f'(x) \leqslant 0$. Donc, pour tout réel x de $[1, 8]$, $|f'(x)] = -f'(x)$. D'après la question C-1), le tableau de variation de la fonction $|f'|$ est

x	1	2	8
f'	0 ↗	$10e^{-2}$	↘ $70e^{-8}$

Le maximum de $|f'(x)|$ est $10e^{-2}$ ou encore la valeur maximale de $\tan(\alpha)$ est $10e^{-2}$ ce qui correspond à un angle de $53,5\ldots°$
La valeur maximale de α reste inférieure à $55°$ et donc le toboggan est conforme aux contraintes imposées.

EXERCICE 5.

Partie A

1) Algorithme complété.

Variables :	n, k entiers S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n v prend la valeur $\ln(2)$ S prend la valeur 0
Traitement : Sortie :	Pour k variant de 1 à n faire S prend la valeur $S+v$ v prend la valeur $\ln\left(2-e^{-v}\right)$ Fin Pour Afficher S

2) Il semble que la suite (S_n) soit croissante et tende lentement vers $+\infty$.

Partie B

1) $u_1 = e^{v_1} = \ln 2 = 2$ puis, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} = e^{v_{n+1}} = e^{\ln\left(2-e^{-v_n}\right)} = 2-e^{-v_n} = 2-\frac{1}{e^{v_n}} = 2-\frac{1}{u_n}.$$

$$\boxed{u_1 = 2 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2-\frac{1}{u_n}.}$$

2) $u_2 = 2-\dfrac{1}{u_1} = 2-\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ puis $u_3 = 2-\dfrac{1}{u_2} = 2-\dfrac{1}{3/2} = 2-\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$ puis $u_4 = 2-\dfrac{1}{u_3} = 2-\dfrac{1}{4/3} = 2-\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.

$$\boxed{u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{4}{3} \text{ et } u_4 = \frac{5}{4}.}$$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

- $\dfrac{1+1}{1} = 2 = u_1$. Donc l'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2-\frac{1}{u_n} \\ &= 2-\frac{1}{(n+1)/n} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2-\frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1)-n}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C

1) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n = e^{v_n} \Rightarrow v_n = \ln\left(u_n\right) \Rightarrow v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).}$$

2) $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln(2) + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{4}{3}\right) = \ln\left(2 \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{3}\right) = \ln(4)$.

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \ln(n+1)$.

- $S_1 = v_1 = \ln(2) = \ln(1+1)$. L'égalité est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $S_n = \ln(n+1)$. Alors,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (v_1 + \ldots + v_n) + v_{n+1} = S_n + v_{n+1} \\ &= \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n+1}\right) = \ln(n+2). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \ln(n+1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ S_n = \ln(n+1).}$$

En particulier,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.}$$

