

# Polynésie 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

## EXERCICE 1

1)  $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 6\vec{AI} + 4\vec{AJ} + 2\vec{AK}$ . Donc, les coordonnées du point G sont (6, 4, 2).

D'autre part, les coordonnées respectives des points I et J sont (1, 0, 0) et (0, 1, 0). Les coordonnées du vecteur  $\vec{IG}$  sont (5, 4, 2) et les coordonnées du vecteur  $\vec{JG}$  sont (6, 3, 2).

S'il existe un réel k tel que  $\vec{JG} = k\vec{IG}$ , alors  $k = 1$  (à partir de la troisième coordonnée) et aussi  $k = \frac{3}{4}$  (à partir de la deuxième coordonnée). Ceci est impossible et donc les vecteurs  $\vec{IG}$  et  $\vec{JG}$  ne sont pas colinéaires ou encore les points I, J et G ne sont pas alignés. On en déduit que les points I, J et G définissent un unique plan.

$$\vec{n} \cdot \vec{IG} = 2 \times 5 + 2 \times 4 + (-9) \times 2 = 10 + 8 - 18 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{JG} = 2 \times 6 + 2 \times 3 + (-9) \times 2 = 12 + 6 - 18 = 0.$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{IG}$  et  $\vec{JG}$  qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJG). Donc, le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan (IJG).

2) Le plan (IJG) est le plan passant par I(1, 0, 0) de vecteur normal  $\vec{n}(2, 2, -9)$ . Une équation du plan (IJG) est donc

$$2(x - 1) + 2(y - 0) - 9(z - 0) = 0$$

ou encore  $2x + 2y - 9z - 2 = 0$ .

3)  $\vec{AB} = 6\vec{AI}$  et donc les coordonnées du point B sont (6, 0, 0).

$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AD} = 6\vec{AI} + 2\vec{AK}$  et donc les coordonnées du point F sont (6, 0, 2).

Les coordonnées du vecteur  $\vec{BF}$  sont donc (0, 0, 2).

La droite (BF) est la droite passant par B(6, 0, 0) et de vecteur directeur  $\frac{1}{2}\vec{BF}(0, 0, 1)$ . Une représentation paramétrique de la droite (BF) est

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

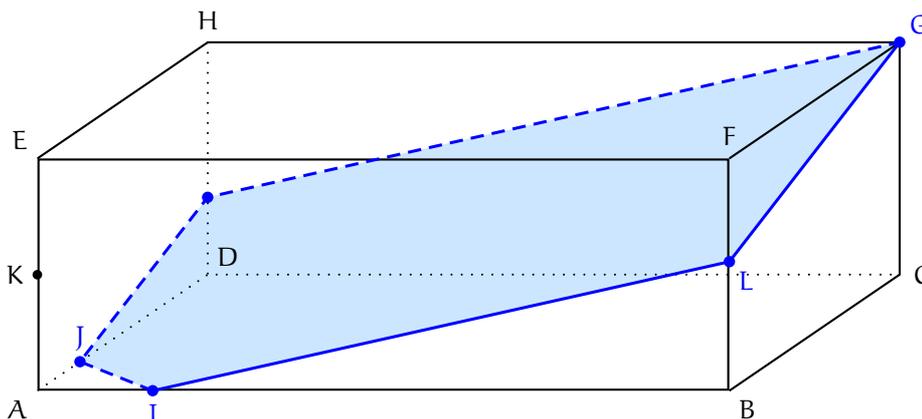
Soit M(6, 0, t),  $t \in \mathbb{R}$ , un point de la droite (BF).

$$M \in (\text{IJG}) \Leftrightarrow 2 \times 6 + 2 \times 0 - 9 \times t - 2 = 0 \Leftrightarrow 10 - 9t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{9}.$$

Pour  $t = \frac{10}{9}$ , on obtient les coordonnées du point L :

$L \left( 6, 0, \frac{10}{9} \right).$

4) **Graphique.** (La droite d'intersection des plans (IJG) et (DCH) est parallèle à la droite (IL)).



## EXERCICE 2

1) Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ .

$$\begin{aligned}M \text{ invariant} &\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z^2 + 4z + 3 = z \\ &\Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation  $z^2 + 3z + 3 = 0$  est  $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ . Donc l'équation  $z^2 + 3z + 3 = 0$  admet deux solutions complexes non réelles conjuguées  $z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ .

Donc, il existe exactement deux points invariants, le point  $M_1$  d'affixe  $z_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Déterminons la forme trigonométrique de  $z_1$  et  $z_2$ .

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \text{ puis}$$

$$z_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

D'autre part,  $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ .

$$z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}.$$

2) On sait déjà que  $OA = |z_A| = |z_2| = \sqrt{3}$  et  $OB = |z_B| = |z_1| = \sqrt{3}$ . Enfin,

$$AB = |z_B - z_A| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}|i| = \sqrt{3}.$$

En résumé,  $OA = OB = AB = \sqrt{3}$  et donc le triangle  $OAB$  est équilatéral.

3) Soient  $x$  et  $y$  deux réels puis  $z = x + iy$ .

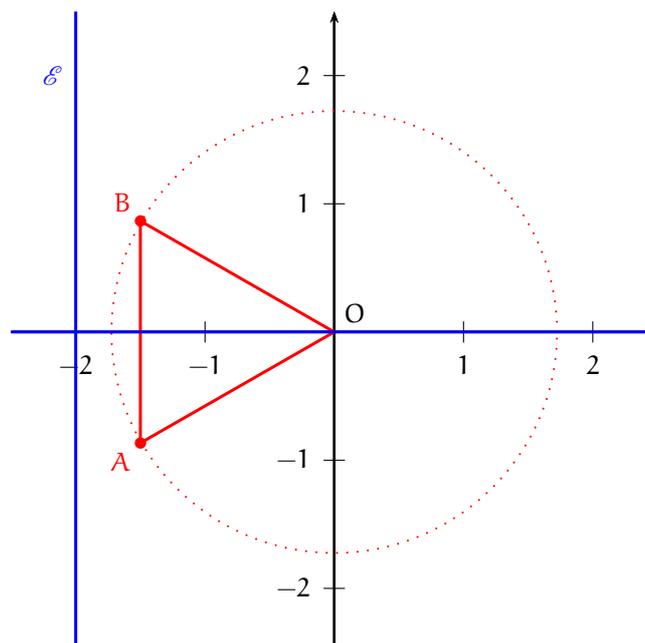
$$\begin{aligned}z' &= z^2 + 4z + 3 = (x + iy)^2 + 4(x + iy) + 3 = x^2 + 2ixy - y^2 + 4x + 4iy + 3 \\ &= x^2 - y^2 + 4x + 3 + 2iy(x + 2).\end{aligned}$$

Par suite,

$$M' \in (Ox) \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow y(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } y = 0.$$

$$\mathcal{L} \text{ est la réunion des droites d'équation respectives } x = -2 \text{ et } y = 0.$$

4) Graphique.



### EXERCICE 3

1) La probabilité demandée est  $P(153 \leq X_1 \leq 177) = P(\mu_1 - 2\sigma_1 \leq X_1 \leq \mu_1 + 2\sigma_1)$ . La calculatrice (ou le cours) fournit

$$P(153 \leq X_1 \leq 177) = 0,95 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

2) a) La probabilité demandée est  $P(X_2 \geq 170) = 1 - P(X_2 \leq 170)$ . La calculatrice fournit

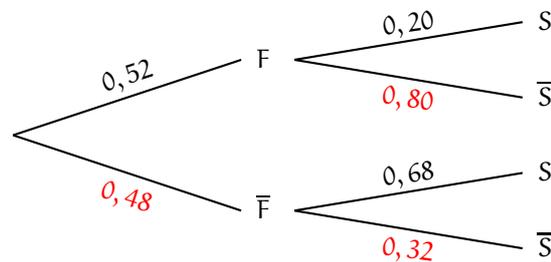
$$P(X_2 \geq 170) = 0,68 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

b) De même, la probabilité qu'une femme choisie au hasard mesure plus de 1,70 m est  $P(X_1 \geq 170) = 1 - P(X_1 \leq 170) = 0,20$  arrondi à  $10^{-2}$ .

Notons F l'événement « la personne choisie est une femme » et S l'événement « la personne choisie mesure plus de 1,70 m ». Ainsi, on a

$$P_F(S) = 0,20 \text{ et } P_{\bar{F}}(S) = 0,68.$$

Représentons la situation par un arbre de probabilité.



La probabilité demandée est  $P_S(F)$ . D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(F) \times P_F(S) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(S) = 0,52 \times 0,20 + (1 - 0,52) \times 0,68 = 0,4304.$$

Mais alors,

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{P(F) \times P_F(S)}{P(S)} = \frac{0,52 \times 0,2}{0,4304} = 0,24 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

$$P_S(F) = 0,24 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

## EXERCICE 4.

### Partie A

1) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 1 est  $f'(1)$ . La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 1 est horizontale si et seulement si  $f'(1) = 0$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[1, 8]$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $[1, 8]$  et pour tout réel  $x$  de  $[1, 8]$ ,

$$f'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-e^{-x}) = (a - (ax + b))e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}.$$

Par suite,

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (-a + a - b)e^{-1} = 0 \Leftrightarrow -be^{-1} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

$$\boxed{b = 0.}$$

2) Pour tout réel  $x$  de  $[1, 8]$ ,  $f(x) = axe^{-x}$ . La condition de l'énoncé s'écrit  $3,5 \leq f(1) \leq 4$  avec  $f(1) = ae^{-1} = \frac{a}{e}$ .

$$\begin{aligned} 3,5 \leq f(1) \leq 4a &\Leftrightarrow 3,5 \leq \frac{a}{e} \leq 4 \Leftrightarrow 3,5e \leq a \leq 4e \text{ (car } e > 0) \\ &\Leftrightarrow 9,5\dots \leq a \leq 10,8\dots \\ &\Leftrightarrow a = 10 \text{ (car } a \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = 10.}$$

### Partie B

1) La fonction  $g$  est dérivable sur  $[1, 8]$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $[1, 8]$  et pour tout réel  $x$  de  $[1, 8]$ ,

$$g'(x) = 10 [(-1) \times e^{-x} + (-x - 1) \times (-e^{-x})] = 10 (-e^{-x} + (x + 1)e^{-x}) = 10xe^{-x} = f(x).$$

La fonction  $g$  est donc une primitive de la fonction  $f$  sur  $[1, 8]$ .

2) L'unité d'aire est le mètre carré. Puisque la fonction  $f$  est continue et positive sur  $[1, 8]$ , l'aire du mur de soutènement exprimée en mètre carré est

$$\mathcal{A} = \int_1^8 f(x) \, dx = [g(x)]_1^8 = 10 ((-8 - 1)e^{-8}) - 10(-1 - 1)e^{-1} = 20e^{-1} - 90e^{-8}.$$

Le prix total en euros à payer est

$$300 + 50 (20e^{-1} - 90e^{-8}) = 300 + 1000e^{-1} - 4500e^{-8} = 666,3\dots$$

Le devis de l'artiste sera de 670 euros.

### Partie C

1) La fonction  $f'$  est dérivable sur  $[1, 8]$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $[1, 8]$  et pour tout réel  $x$  de  $[1, 8]$ ,

$$(f')'(x) = 10 ((-1)e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x})) = 10(-1 - 1 + x)e^{-x} = 10(x - 2)e^{-x}.$$

Pour tout réel  $x$  de  $[1, 8]$ ,  $10e^{-x} > 0$  et donc pour tout réel  $x$  de  $[1, 8]$ ,  $(f')'(x)$  est du signe de  $x - 2$ . On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f'$ .

$x$	1	2	8
$(f')'(x)$	-	0	+
$f'$	0	$-10e^{-2}$	$-70e^{-8}$

2)  $f'(x)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $M$ . Cette tangente est la droite  $ML$ . Donc,  $|f'(x)|$  est la valeur absolue du coefficient directeur de la droite  $(ML)$  à savoir  $\frac{PM}{PL}$ .

D'autre part, dans le triangle  $MPL$ , rectangle en  $P$ , on a  $\tan(\alpha) = \frac{PM}{PL}$ . Finalement

$$\tan(\alpha) = |f'(x)|.$$

3) Pour tout réel  $x$  de  $[1, 8]$ ,  $1 - x \leq 0$  puis  $10(1 - x)e^{-x} \leq 0$  ou encore  $f'(x) \leq 0$ . Donc, pour tout réel  $x$  de  $[1, 8]$ ,  $|f'(x)| = -f'(x)$ . D'après la question C-1), le tableau de variation de la fonction  $|f'|$  est

$x$	1	2	8
$f'$	0	$10e^{-2}$	$70e^{-8}$

Le maximum de  $|f'(x)|$  est  $10e^{-2}$  ou encore la valeur maximale de  $\tan(\alpha)$  est  $10e^{-2}$  ce qui correspond à un angle de  $53,5\dots^\circ$ .

La valeur maximale de  $\alpha$  reste inférieure à  $55^\circ$  et donc le toboggan est conforme aux contraintes imposées.

**EXERCICE 5.**

1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ = A + 2I.$$

$$A^2 = A + 2I.$$

- 2) •  $A^3 = A \times A^2 = A(A + 2I) = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I.$   
 •  $A^4 = A \times A^3 = A(3A + 2I) = 3A^2 + 2A = 3A + 6I + 2A = 5A + 6I.$

$$A^3 = 3A + 2I \text{ et } A^4 = 5A + 6I.$$

3) Montrons par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $A^n = r_n A + s_n I$ .

- $r_0 A + s_0 I = 0A + 1I = I = A^0$ . Donc, l'égalité à démontrer est vraie quand  $n = 0$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $A^n = r_n A + s_n I$ . Alors,

$$A^{n+1} = A \times A^n \\ = A \times (r_n A + s_n I) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ = r_n A^2 + s_n A = r_n (A + 2I) + s_n A = (r_n + s_n) A + 2r_n I \\ = r_{n+1} A + s_{n+1} I.$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, A^n = r_n A + s_n I.$$

4) Soit  $n$  un entier naturel.

$$k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = s_n - r_n = -(r_n - s_n) = -k_n.$$

Donc la suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de raison  $q = -1$  et de premier terme  $k_0 = r_0 - s_0 = 0 - 1 = -1$ . On en déduit que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$k_n = k_0 \times q^n = -(-1)^n.$$

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, k_n = -(-1)^n.$$

5) De même, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$t_n = \left( r_0 + \frac{(-1)^0}{3} \right) \times 2^n = \frac{2^n}{3}.$$

6) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question 5),  $r_n + \frac{(-1)^n}{3} = \frac{2^n}{3}$  et donc  $r_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ .

D'après la question 4),  $r_n - s_n = -(-1)^n$  et donc  $s_n = r_n + (-1)^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} + (-1)^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ .

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, r_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } s_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

7) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après les questions 3) et 6),

$$A^n = r_n A + s_n I = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -4 \frac{2^n - (-1)^n}{3} & 6 \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ -3 \frac{2^n - (-1)^n}{3} & 5 \frac{2^n - (-1)^n}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2 \times 2^n - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2 \times 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2 \times 2^n - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2 \times 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}$ .