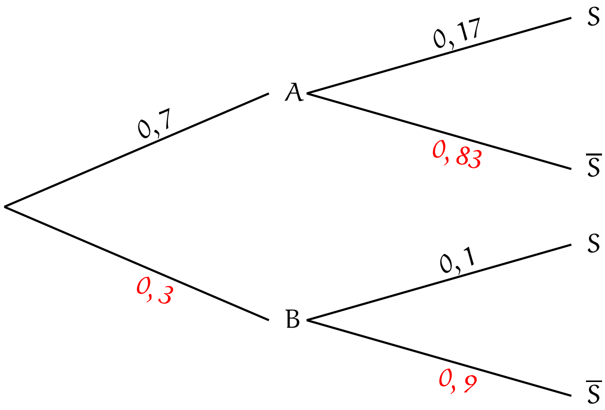
Nouvelle Calédonie. Novembre 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilité.



$p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119$.

$$\boxed{p(A \cap S) = 0,119.}$$

2) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) = 0,119 + 0,3 \times 0,1 = 0,149.$$

3) La probabilité demandée est $p_S(A)$.

$$p_S(A) = \frac{p(A \cap S)}{p(S)} = \frac{0,119}{0,149} = 0,799 \text{ arrondi au millième.}$$

4) Déterminons un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95%. Ici, $n = 1000$. D'autre part, la fréquence observée est $f = \frac{211}{1000} = 0,211$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $nf = 211 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 789 \geqslant 5$.

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,211 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, f + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,179; 0,243]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = P(\mu_X - \sigma_X \leqslant X \leqslant \mu_X + \sigma_X)$. La calculatrice (ou le cours) fournit

$$P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = 0,683 \text{ arrondi au millième.}$$

2) La calculatrice fournit

$$P(X \leqslant 6,5) = 0,174 \text{ arrondi au millième.}$$

3) D'après la phrase initiale de l'énoncé, dire que l'eau est très peu calcaire équivaut à dire que $Y \leqslant 6,5$. Or,

$$Y \leqslant 6,5 \Leftrightarrow Y - 9 \leqslant -2,5 \Leftrightarrow \frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}.$$

La probabilité donnée dans l'énoncé est donc encore $P\left(\frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}\right)$ où cette fois-ci la variable $\frac{Y-9}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. La calculatrice fournit

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$P(Y \leqslant 6,5) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow -\frac{2,5}{\sigma} = -1,2815\ldots \Leftrightarrow \sigma = 1,951 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie C

1) La fonction $x \mapsto a\cos x$ est continue et positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, l'aire emandée, exprimée en unités d'aire est

$$\mathscr{A}_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x \, dx = [a\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a(1-(-1)) = 2a.$$

2) D'autre part, l'aire du disque est $\mathscr{A}_2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{4} = 2a - \frac{\pi a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{2} = 2a \Leftrightarrow a = \frac{4}{\pi}.$$

De plus, $\frac{4}{\pi} = 1,2\ldots$ et en particulier, $\frac{4}{\pi} < 1,4$. La contrainte est respectée pour $a = \frac{4}{\pi}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) Soit a un réel. La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_a'(x) = e^{x-a} - 2.$$

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f_a'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 2 \\ &\Leftrightarrow x - a > \ln 2 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x > a + \ln 2, \end{aligned}$$

et de même, $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a + \ln 2$. La fonction f_a' est strictement positive sur $]a + \ln 2, +\infty[$, s'annule en $a + \ln 2$ et est strictement négative sur $]-\infty, a + \ln 2[$. On en déduit que la fonction f_a est strictement décroissante sur $]-\infty, a + \ln 2]$ et est strictement croissante sur $[a + \ln 2, +\infty[$ puis que

la fonction f_a admet un minimum en $a + \ln 2$.

2) Ce minimum est $f_a(a + \ln 2) = e^{a+\ln 2-a} - 2(a + \ln 2) + e^a = e^{\ln 2} - 2a - 2\ln 2 + e^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, posons $g(a) = e^a - 2a + 2 - 2\ln 2$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel a,

$$g'(a) = e^a - 2.$$

La fonction g' est strictement négative sur $]-\infty, \ln 2[$ et strictement positive sur $]\ln 2, +\infty[$. La fonction g admet donc un minimum en $\ln 2$ et ce minimum est égal à

$$g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 + 2 - 2\ln 2 = 2 + 2 - 4\ln 2 = 4 - 4\ln 2.$$

Le minimum de f_a est minimum quand $a = \ln 2$ et le minimum correspondant est $4 - 4\ln 2$.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

Partie A

Prenons $x = y = z = 1$. On a $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \geqslant \dfrac{1}{3}$ mais $x + y + z = 3 \neq 1$. Donc l'implication (P_2).

Partie B

1) a) La droite (BE) est contenue dans le plan (ABE) et le point D n'appartient pas à ce plan. Donc le point D n'appartient pas à la droite (BE) ou encore les points B, D et E ne sont pas alignés. On en déduit que les points B, D et E définissent un unique plan, le plan (BDE).

Les points B, D et E ont pour coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Les coordonnées de chacun de ces points vérifient l'équation $x + y + z = 1$. Donc, le plan d'équation $x + y + z = 1$ est le plan (BDE).

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Donc, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. D'autre part, le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan d'équation $1 \times x + 1 \times y + 1 \times z = 1$ qui est le plan (BDE). Donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

c) La droite (AG) est la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur directeur $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AG) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Soit $M(t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AG).

$$M \in (BDE) \Leftrightarrow t + t + t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = \dfrac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) : le point K de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

2) Les longueurs BD, BE et DE sont toutes trois égales à la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 à savoir $\sqrt{2}$. Donc, le triangle BDE est équilatéral.

3) a) Soit M un point du plan (BDE) distinct de M. Le point K est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BDE). Donc le triangle AKM est rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore,

$$AM^2 = AK^2 + KM^2.$$

Cette égalité reste vraie quand $M = K$ car alors $AK^2 + KM^2 = AK^2 + 0 = AK^2$.

b) Pour tout point M du plan (BDE), on a $MK^2 \geqslant 0$ puis $AK^2 + MK^2 \geqslant AK^2$ et donc $AM^2 \geqslant AK^2$.

c) Soient x, y et z trois réels tels que $x + y + z = 1$. Soit M le point de l'espace dont les coordonnées sont (x, y, z). D'après la question 1), M est un point du plan (BDE). D'après la question 3)b), $AM^2 \geqslant AK^2$. Or

$$AM^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

D'autre part, d'après la question 1)c)

$$AK^2 = \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Donc, $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$. On a montré que l'implication (P_1) est vraie.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

EXERCICE 4.

1) $d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = \frac{1}{2} \times 300 + 100 = 250$ et $a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = \frac{1}{2} \times 300 + \frac{1}{2} \times 450 + 70 = 445$.

$$\boxed{d_1 = 250 \text{ et } a_1 = 445.}$$

2) a) L'algorithme affiche $D = 250$ qui est bien la valeur de d_1 mais ensuite l'algorithme affiche $A = 420$ qui n'est pas la valeur de a_1.

b) Algorithme modifié : 1ère solution

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

Algorithme modifié : 2ème solution

Variables :	n et k sont des entiers naturels M, D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n M prend la valeur D D prend la valeur $\frac{M}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{M}{2} + 70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

3) a) Soit n un entier naturel.

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n + 100 - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}(d_n - 200) = \frac{1}{2}e_n.$$

Don la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b) D'autre part, $e_0 = d_0 - 200 = 300 - 200 = 100$. On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$e_n = e_0 \times q^n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On en déduit encore que pour tout entier naturel n, $d_n = e_n + 200 = 200 + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ d_n = 200 + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

c) Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = 200.}$$

4) a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2.$$

Ensuite, $n \geqslant 3 \Rightarrow n - 1 \geqslant 2 \Rightarrow (n-1)^2 \geqslant 4 \Rightarrow (n-1)^2 - 2 \geqslant 2$. En particulier, $(n-1)^2 - 2 \geqslant 0$ ou encore $2n^2 - (n+1)^2 \geqslant 0$ ou enfin $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

- $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Donc, $2^4 \geqslant 4^2$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 4$.
- Soit $n \geqslant 4$. Supposons que $2^n \geqslant n^2$. Alors,

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geqslant 2 \times n^2 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &\geqslant (n+1)^2 \text{ (d'après la question précédente et car } n \geqslant 4 \Rightarrow n \geqslant 3). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

$$\begin{aligned} 0 < n^2 \leqslant 2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{n^2} \Rightarrow 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2} \\ \Rightarrow 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}. \end{aligned}$$

d) Pour tout $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100}{n} = 0$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 110\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 340.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.