Nouvelle Calédonie. Mars 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) Pour tout réel x,

$$f_2'(x) = e^x - 2.$$

Soit x un réel. Par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$,

$$f_2'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2.$$

De même, $f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$. En tenant compte de $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2$, on en déduit le tableau de variation de la fonction f_2,

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
f_2		$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$	

b) La question précédente permet d'affirmer que la fonction f_2 admet un minimum égal à $2 - 2\ln 2$.
Puisque $2-2\ln 2 = 0,6\ldots$, ce minimum est strictement positif. On en déduit que la fonction f_2 est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et en particulier la fonction f_2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ou encore la courbe Γ et la droite Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.

2) a) Limite de la fonction f_a en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. D'autre part, puisque $a > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -ax = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty.}$$

Limite de la fonction f_a en $+\infty$. Pour tout réel non nul x,

$$f_a(x) = e^x\left(1 - \frac{ax}{e^x}\right) = e^x\left(1 - a\frac{1}{e^x/x}\right).$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - a\dfrac{1}{e^x/x}\right) = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et en multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty.}$$

b) Pour tout réel x,

$$f_a'(x) = e^x - a.$$

Soit x un réel. Par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$,

$$f_a'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a.$$

De même, $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln a$. En tenant compte de $f(\ln a) = e^{\ln a} - a\ln a = a - a\ln a$, on en déduit le tableau de variation de la fonction f_a,

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a	$+\infty$	$\searrow$	$a - a\ln a$	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, la fonction f_a admet un minimum égal à $a - a\ln a$.

c) Soit a un réel strictement positif.

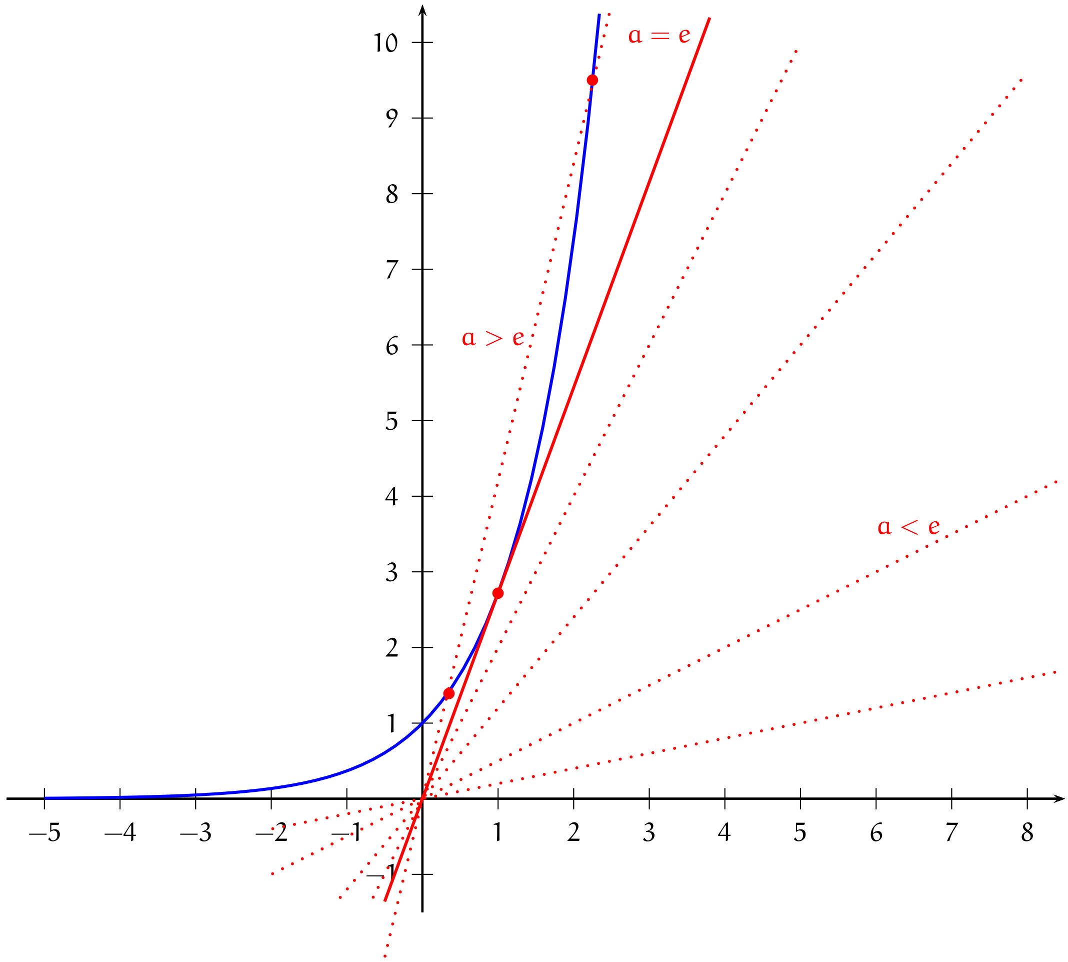
$$a - a\ln a > 0 \Leftrightarrow a(1 - \ln a) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln a > 0 \Leftrightarrow \ln a < 1 \Leftrightarrow a < e,$$

et de même $a - a\ln a = 0 \Leftrightarrow a = e$ et donc $a - a\ln a < 0 \Leftrightarrow a > e$.

d) • si $a < e$, alors $a - \ln a > 0$. La fonction f_a admet donc un minimum strictement positif. En particulier, la fonction f_a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la courbe Γ et la droite Δ_a n'ont pas de point d'intersection.

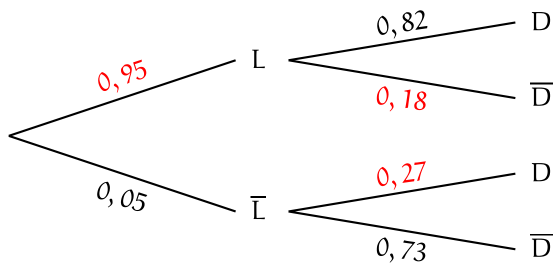
• Si $a = e$, la fonction $f_a = f_e$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et admet un minimum égal à 0. On en déduit que la fonction f_e s'annule une fois et une seule, en $x = 1$. La courbe Γ et la droite Δ_e ont exactement un point d'intersection, le point de coordonnées $(1, e)$.

• Si $a > e$, la fonction f_a est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, \ln a]$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty > 0$ et $f_a(\ln a) = a - a\ln a < 0$. Donc, la fonction f_a s'annule une fois et une seule sur $]-\infty, \ln a]$ et même sur $]-\infty, \ln a[$. De même, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$, la fonction f_a s'annule une fois et une seule sur $]\ln a, +\infty[$. Dans ce cas, la courbe Γ et la droite Δ_a ont exactement deux points d'intersection.



EXERCICE 2

1) a) L'énoncé fournit $P_L(C) = 0,02$.
Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $P\left(L \cap \overline{C}\right)$.

$$P\left(L \cap \overline{C}\right) = P(L) \times P_L\left(\overline{C}\right) = \left(1 - P\left(\overline{L}\right)\right)\left(1 - P_L(C)\right) = (1 - 0,05)(1 - 0,02) = 0,95 \times 0,98 = 0,931.$$

c) La probabilité demandée est $P\left(\overline{L} \cup C\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(\overline{L} \cup C\right) &= P\left(\overline{L} \cup (L \cap C)\right) = P\left(\overline{L}\right) + P\left(L \cap C\right) \text{ (car } \overline{L} \cap (L \cap C) = \varnothing) \\ &= P\left(\overline{L}\right) + P(L) - P\left(L \cap \overline{C}\right) \text{ (d'après la formule des probabilités totales)} \\ &= 1 - P\left(L \cap \overline{C}\right) = 1 - 0,931 = 0,069. \end{aligned}$$

2) a) L'énoncé fournit $P(X > 1000) = 0,98$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - P(X \leqslant x) = 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - \left(\left(-e^{-\lambda x}\right) - \left(-e^0\right)\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \\ &= e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

puis

$$P(X > 1000) = 0,98 \Leftrightarrow e^{-1000\lambda} = 0,98 \Leftrightarrow -1000\lambda = \ln(0,98) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,98)}{1000}.$$

b) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 10\ 000)$.

$$P(X \geqslant 10\ 000) = e^{-10\ 000\lambda} = e^{10\ln(0,98)} = 0,817 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

c)

$$P(20\ 000 \leqslant X \geqslant 30\ 000) = P(X \geqslant 20\ 000) - P(X \geqslant 30\ 000) = e^{20\ln(0,98)} - e^{30\ln(0,98)} = 0,122 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Ceci signifie qu'environ $12,2\%$ des puces auront une durée de vie comprise entre $20\ 000$ et $30\ 000$ heures.

3) a) La variable alétaoire Y est régie par un schéma de BENOULLI. En effet,

- $15\ 000$ expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la puce a une durée de vie courte » avec une probabilité $p = 0,003$ et « la puce n'a pas une durée de vie courte » avec une probabilité $1 - p = 0,997$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15\ 000$ et $p = 0,003$.

b) $E(Y) = np = 15\ 000 \times 0,003 = 45$.

c) La calculatrice fournit

$$P(40 \leqslant Y \leqslant 50) = P(Y \leqslant 50) - P(Y \leqslant 39) = 0,589 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

EXERCICE 3

1) a) D_1 est la droite passant par $A_1(0,2,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}(1,2,3)$. Une représentation paramétrique de la droite D_1 est

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2+2t \\ z = -1+3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Un vecteur directeur de la droite D_2 est $\overrightarrow{u_2}(1,-2,0)$.

c) Soit $M(1+k,-2k,2)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de la droite D_2.

$$M = A_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+k = -1 \\ -2k = 4 \\ 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = -2 \\ k = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow k = -2.$$

Pour $k = -2$, on obtient effectivement le point $A_2(-1,4,2)$. Le point A_2 appartient à la droite D_2.

2) S'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u_1} = \lambda\overrightarrow{u_2}$, la troisième coordonnée fournit $1 = 0 \times \lambda$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires ou encore les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites D_1 et D_2 sont sécantes ou non coplanaires.

Soient $M_1(t,2+2t,-1+3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite D_1 et $M_2(1+k,-2k,2)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de la droite D_2.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 1+k \\ 2+2t = -2k \\ -1+3t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 1 \\ 1 = 1+k \\ 2+2 = -2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 1 \\ k = 0 \\ k = -2 \end{array}\right.$$

Ce sytème n'a pas de solution ou encore les droites D_1 et D_2 n'ont pas de point commun. On en déduit que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3) $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} = (-6) \times 1 + (-3) \times 2 + 4 \times 3 = -6 - 6 + 12 = 0$. Donc, les droites D_1 et Δ_1 sont orthogonales. De plus, les droites D_1 et Δ_1 sont sécantes en A_1 et finalement les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

4) a) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_1} = 17\times 1+(-22)\times 2+9\times 3 = 17-44+27 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 17\times(-6)+(-22)\times(-3)+9\times 4 = -102+66+36 = 0$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P_1. On en déduit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à P_1.

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_2} = 17 \times 1 + (-22) \times (-2) + 9 \times 0 = 17 + 44 = 61 \neq 0$. Donc, $\overrightarrow{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{u_2}$ qui est un vecteur du plan P_2. En particulier, les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5) Δ est dirigée par $\overrightarrow{v}$, D_1 est dirigée par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u_1}$ sont orthogonaux. Donc, les droites Δ et D_1 sont orthogonales. De plus, les droites Δ et D_1 sont coplanaires car contenues dans le plan P_1. On en déduit que les droites Δ et D_1 sont perpendiculaires.

De même, les droites Δ et D_2 sont perpendiculaires et on a donc trouvé une droite perpendiculaire aux droites D_1 et D_2, à savoir la droite Δ.

EXERCICE 4.

1) $u_1 = \sqrt{3}u_0 - v_0 = \sqrt{3}\times 1 - 0 = \sqrt{3}$ et $v_1 = u_0 + \sqrt{3}v_0 = 1 + \sqrt{3}\times 0 = 1$.
$u_2 = \sqrt{3}u_1 - v_1 = \sqrt{3}\times\sqrt{3} - 1 = 2$ et $v_2 = u_2 + \sqrt{3}v_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3}\times 1 = 2\sqrt{3}$.

$$\boxed{u_1 = \sqrt{3},\ v_1 = 1,\ u_2 = 2 \text{ et } v_2 = 2\sqrt{3}.}$$

2) a) Tableau complété.

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
$3-\sqrt{3}$	$6-\sqrt{3}$	2

b) L'algorithme précédent n'affiche donc pas les valeurs de u_N et v_N puisque pour $N = 2$, on devrait obtenir $S = 2$ et $T = 2\sqrt{3}$.

Algorithme modifié.

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier S est un nombre réel T est un nombre réel U est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S Affecter 0 à T Affecter 0 à K
Traitement :	Tant que $K < N$ Affecter S à U Affecter $\sqrt{3}U - T$ à S Affecter $U + \sqrt{3}T$ à T Affecter $K + 1$ à K Fin Tant que
Sortie :	Afficher S Afficher T

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} az_n &= \left(\sqrt{3}+i\right)(u_n + iv_n) = \sqrt{3}u_n + i\sqrt{3}v_n + iu_n - \sqrt{3}v_n = \left(\sqrt{3}u_n - v_n\right) + i\left(u_n + \sqrt{3}v_n\right) \\ &= u_{n+1} + iv_{n+1} = z_{n+1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1} = az_n.}$$

b) $|a| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ puis

$$a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel, $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

- $z_0 = 1 + 0i = 1 = 2^0 e^{i\frac{0\pi}{6}}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$. Alors,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= az_n = 2e^{i\frac{\pi}{6}} z_n \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{6}} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel, $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = \mathrm{Re}(z_n) = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$ et $v_n = \mathrm{Im}(z_n) = 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$ et $v_n = 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

