Liban 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) Le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{\mathsf{FD}}$ a pour coordonnées $(-1, 1, -1)$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, le point J a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ et le point K a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\overrightarrow{\mathsf{FD}}.\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

$$\overrightarrow{\mathsf{FD}}.\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 = 0.$$

On en déduit que la droite (FD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (IJK) (les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ étant deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), les droites (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK)) et donc la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) Le plan (IJK) est le plan passant par I $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{\mathsf{FD}}(-1, 1, -1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $-\left(x - \frac{1}{2}\right) + (y - 0) - (z - 0) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{le plan (IJK) a pour équation } x - y + z - \frac{1}{2} = 0.}$$

2) La droite (FD) est la droite passant par $\mathsf{D}(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathsf{FD}}(-1, 1, -1)$. Donc,

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de la droite (FD) est } \left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

3) Soit $\mathsf{N}(-t, 1 + t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (FD).

$$\mathsf{N} \in (\mathrm{IJK}) \Leftrightarrow (-t) - (1 + t) + (-t) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -3t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Pour $t = -\frac{1}{2}$, on obtient le point M de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4) $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}.\overrightarrow{\mathrm{IK}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I. L'aire du triangle IJK est donc

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{IJ} \times \mathrm{IK}}{2}.$$

$\mathrm{IJ} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\mathrm{IK} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc,

$$\mathscr{A} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5) D'après la question 3, le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK) est le point M. Donc, le volume du tétraèdre FIJK est

$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire(IJK)} \times \mathsf{MF}}{3}.$$

$\mathsf{MF} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc,

$$\mathscr{V} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}.$$

6) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (IJ) est $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = t \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

Le point K a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et le point L a pour coordonnées $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (KL) est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ z = \frac{t'}{2} \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

Soient $P\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (IJ) et $Q\left(1, \frac{1}{2} + \frac{t'}{2}, \frac{t'}{2}\right)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (KL).

$$P = Q \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = 1 \\ \frac{t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ t = \frac{t'}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ t' = -2 \\ t' = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ t' = -2 \end{array}\right. .$$

Pour $t = -1$ (ou $t' = -2$), on obtient le point $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

EXERCICE 2

1) $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

$$\boxed{u_0 = \ln(2).}$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.}$$

b) $u_1 = \dfrac{1}{0+1} - u_0 = 1 - \ln(2)$.

$$\boxed{u_1 = 1 - \ln(2).}$$

3) a) Algorithme complété.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln(2)$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1}{i} - u$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante, convergente, de limite nulle.

4) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $1+x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

b) Pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \geqslant 0$ ou encore $u_n \geqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif ou nul.

5) Soit n un entier naturel. Puisque $u_{n+1} \geqslant 0$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3

1) Notons f la fonction exponentielle. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est $y = f(1)+f'(1)(x-1)$ ou encore $y = e + e(x - e)$ ou enfin $y = ex$.

2) Il semble que si

- si $m < 0$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.
- si $0 \leqslant m < e$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point d'intersection.
- si $m = e$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.
- si $m > e$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement deux points d'intersection.

3) Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = e^x - mx$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = e^x - m.$$

• Si $m = 0$, pour tout réel x, $g(x) = e^x > 0$ et donc la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_0$ n'ont pas de point d'intersection.

• Si $m < 0$, pour tout réel x, $g'(x) > e^x > 0$ et donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -mx = -\infty$ (car $-m > 0$). Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -mx = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

En résumé, la fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule ou encore la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.

• Si $m > 0$, pour tout réel x, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(m)$ et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(m)$. Donc, la fonction g est crictement décroissante sur $]-\infty, \ln(m)]$ et strictement croissante sur $[\ln(m), +\infty[$. En particulier, la fonction g admet un minimum strict en $\ln(m)$. De plus,

$$g(\ln(m)) = e^{\ln(m)} - m\ln(m) = m(1 - \ln(m)).$$

Si $0 < m < e$, alors $1-\ln(m) > 1-\ln(e) = 0$. Dans ce cas, le minimum de la fonction g est strictement positif et donc, la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ou encore la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point commun.

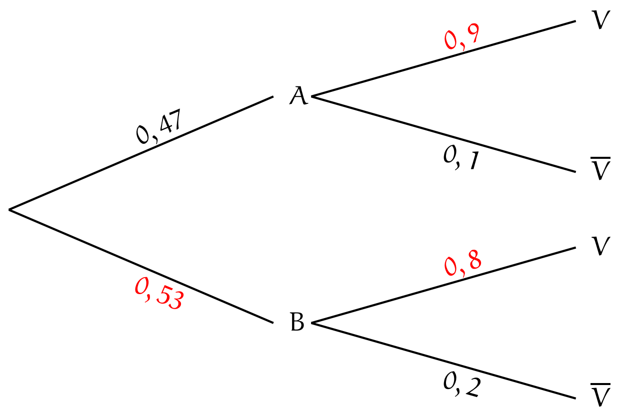
Si $m = e$, le minimum de la fonction g est égal à 0. La fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ ou encore la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement un point commun.

Si $m > e$, alors $1 - \ln(m) < 1 - \ln(e) = 0$. Dans ce cas, le minimum de la fonction g est strictement négatif.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -mx = +\infty$ (car $-m < 0$). Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
Pour tout réel strictement positif x, $g(x) = e^x\left(1 - m\dfrac{x}{e^x}\right) = e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x/x}\right)$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{e^x/x}\right) = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

En résumé, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(m)]$, continue et strictement croissante sur $[\ln(m), +\infty[$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $g(\ln(m)) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Comme plus haut, l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule dans $]-\infty, \ln(m)[$ et une solution et une seule dans $]\ln(m), +\infty[$ ou encore la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement deux points d'intersection.

EXERCICE 4.

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) a) La probabilité demandée est $p(V)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(V) &= p(A) \times p_A(V) + p(B) \times p_B(V) \\ &= 0,47 \times (1 - 0,1) + (1 - 0,47) \times (1 - 0,2) = 0,847. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(V) = 0,847.}$$

b) La probabilité demandée est $p_V(A)$.

$$p_V(A) = \frac{p(A \cap V)}{p(V)} = \frac{p(A) \times p_A(V)}{p(V)} = \frac{0,47 \times 0,9}{0,847} = 0,499 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$\boxed{p_V(A) = 0,499 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

3) L'événement considéré est l'événement $(A \cap V) \cup (B \cap \overline{V})$. La probabilité demandée est

$$\begin{aligned} p\left((A \cap V) \cup (B \cap \overline{V})\right) &= p(A \cap V) + p(B \cap \overline{V}) = p(A) \times p_A(V) + p(B) \times p_B(\overline{V}) \\ &= 0,47 \times 0,9 + 0,53 \times 0,2 = 0,529. \end{aligned}$$

4) La fréquence observée dans l'échantillon est $f = 0,529$.
On note que $n = 1200 \geqslant 30$, $nf = 634,8 \geqslant 5$ et $n(1 - f) = 565,2 \geqslant 5$.
Un intervalle de confiance au seuil de confiance $0,95$ est $\left[0,529 - \frac{1}{\sqrt{1200}}, 0,529 + \frac{1}{\sqrt{1200}}\right]$ ou encore $[0,5001; 0,5579]$ en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

La fourchette obtenue montre que le candidat A sera élu au seuil de confiance 95%.

5) Notons n le nombre de communications. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes contactées acceptant de répondre à l'enquête.
La variable X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux éventualités « la personne interrogée accepte de répondre » avec une probabilité $p = 0,4$ et « la personne interrogée n'accepte pas de répondre » avec une probabilité $p = 0,6$.

On sait que l'espérance de X est $np = n \times 0,4 = 0,4n$ ce qui signifie qu'en moyenne si n personnes sont interrogées, $0,4n$ acceptent de répondre.
On veut que $0,4n = 1200$ ou encore $n = \frac{1200}{0,4} = 3000$. Le temps nécessaire pour interroger ces 3000 personnes est 300 demi-heures ou encore 150 heures.

Le temps moyen à prévoir pour obtenir un échantillon de 1200 personnes est 150 heures.

