Liban 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) Le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{FD}$ a pour coordonnées $(-1, 1, -1)$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, le point J a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ et le point K a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 = 0.$$

On en déduit que la droite (FD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (IJK) (les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ étant deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), les droites (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK)) et donc la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) Le plan (IJK) est le plan passant par I $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{FD}(-1, 1, -1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $-\left(x - \frac{1}{2}\right) + (y - 0) - (z - 0) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{le plan (IJK) a pour équation } x - y + z - \frac{1}{2} = 0.}$$

2) La droite (FD) est la droite passant par $D(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{FD}(-1, 1, -1)$. Donc,

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de la droite (FD) est } \left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

3) Soit $N(-t, 1 + t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (FD).

$$N \in (IJK) \Leftrightarrow (-t) - (1 + t) + (-t) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -3t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Pour $t = -\frac{1}{2}$, on obtient le point M de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I. L'aire du triangle IJK est donc

$$\mathscr{A} = \frac{IJ \times IK}{2}.$$

$IJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $IK = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc,

$$\mathscr{A} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5) D'après la question 3, le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK) est le point M. Donc, le volume du tétraèdre FIJK est

$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire(IJK)} \times \text{MF}}{3}.$$

$MF = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc,

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$\mathscr{V} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}.$$

6) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (IJ) est $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = t \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}$.

Le point K a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et le point L a pour coordonnées $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (KL) est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ z = \frac{t'}{2} \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}$.

Soient $P\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (IJ) et $Q\left(1, \frac{1}{2} + \frac{t'}{2}, \frac{t'}{2}\right)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (KL).

$$P = Q \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = 1 \\ \frac{t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ t = \frac{t'}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ t' = -2 \\ t' = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ t' = -2 \end{array}\right. .$$

Pour $t = -1$ (ou $t' = -2$), on obtient le point $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

$$\boxed{u_0 = \ln(2).}$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.}$$

b) $u_1 = \dfrac{1}{0+1} - u_0 = 1 - \ln(2)$.

$$\boxed{u_1 = 1 - \ln(2).}$$

3) a) Algorithme complété.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln(2)$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1}{i} - u$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante, convergente, de limite nulle.

4) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $1+x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

b) Pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \geqslant 0$ ou encore $u_n \geqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif ou nul.

5) Soit n un entier naturel. Puisque $u_{n+1} \geqslant 0$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

1) Notons f la fonction exponentielle. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est $y = f(1)+f'(1)(x-1)$ ou encore $y = e + e(x - e)$ ou enfin $y = ex$.

2) Il semble que si

- si $m < 0$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.
- si $0 \leqslant m < e$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point d'intersection.
- si $m = e$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.
- si $m > e$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement deux points d'intersection.

3) Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = e^x - mx$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = e^x - m.$$

• Si $m = 0$, pour tout réel x, $g(x) = e^x > 0$ et donc la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_0$ n'ont pas de point d'intersection.

• Si $m < 0$, pour tout réel x, $g'(x) > e^x > 0$ et donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -mx = -\infty$ (car $-m > 0$). Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -mx = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

En résumé, la fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x \to -\infty} g(x), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule ou encore la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement un point d'intersection.

• Si $m > 0$, pour tout réel x, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(m)$ et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(m)$. Donc, la fonction g est crictement décroissante sur $]-\infty, \ln(m)]$ et strictement croissante sur $[\ln(m), +\infty[$. En particulier, la fonction g admet un minimum strict en $\ln(m)$. De plus,

$$g(\ln(m)) = e^{\ln(m)} - m\ln(m) = m(1 - \ln(m)).$$

Si $0 < m < e$, alors $1-\ln(m) > 1-\ln(e) = 0$. Dans ce cas, le minimum de la fonction g est strictement positif et donc, la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ou encore la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point commun.

Si $m = e$, le minimum de la fonction g est égal à 0. La fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ ou encore la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement un point commun.

Si $m > e$, alors $1 - \ln(m) < 1 - \ln(e) = 0$. Dans ce cas, le minimum de la fonction g est strictement négatif.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -mx = +\infty$ (car $-m < 0$). Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
Pour tout réel strictement positif x, $g(x) = e^x\left(1 - m\dfrac{x}{e^x}\right) = e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x/x}\right)$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{e^x/x}\right) = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

En résumé, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(m)]$, continue et strictement croissante sur $[\ln(m), +\infty[$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, $g(\ln(m)) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Comme plus haut, l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule dans $]-\infty, \ln(m)[$ et une solution et une seule dans $]\ln(m), +\infty[$ ou encore la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ ont exactement deux points d'intersection.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

EXERCICE 4.

1) D'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = p_0 \times 0,9 + q_0 \times (1 - 0,6) = 0,4$$

et donc $q_1 = 1 - 0,4 = 0,6$.

$$\boxed{p_1 = 0,4 \text{ et } q_1 = 0,6.}$$

2) Plus généralement, d'après la formule des probabilités totales,, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,9 \times p_n + (1 - 0,6)q_n = 0,9p_n + 0,4q_n.$$

En case B3, on écrit $0,9*$B2+$0,4*$C2 et en case C3, on écrit 1−B3.

3) a)

$$\begin{aligned} A + 0,5B &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5 \times 0,2 & 0,8 - 0,5 \times 0,8 \\ 0,2 - 0,5 \times 0,2 & 0,2 + 0,5 \times 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} = M. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 & 0,8 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 \\ 0,2 \times 0,8 + 0,2 \times 0,2 & 0,2 \times 0,8 + 0,2 \times 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,2 - 0,8 \times 0,2 & -0,8 \times 0,8 + 0,8 \times 0,8 \\ 0,2 \times 0,2 - 0,2 \times 0,2 & -0,2 \times 0,8 + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,8 - 0,8 \times 0,2 & 0,2 \times 0,8 - 0,8 \times 0,2 \\ -0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 & -0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel strictement positif n, $M^n = A + 0,5^n B$.

- $A + 0,5^1 B = A + 0,5B = M = M^1$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $M^n = A + 0,5^n B$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n = (A + 0,5B) \times (A + 0,5^n B) = A^2 + 0,5^n AB + 0,5BA + 0,5^{n+1} B^2 \\ &= A + 0,5^{n+1} B. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel strictement positif n, $M^n = A + 0,5^n B$.

d) On note que $A + 0,5^0 B = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = M^0$ et donc l'égalité de la question précédente est encore vraie quand $n = 0$.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= X_n = M^n X_0 \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5^n \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 + 0,2 \times 0,5^n & 0,8 - 0,8 \times 0,5^n \\ 0,2 + 0,2 \times 0,5^n & 0,2 + 0,8 \times 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 - 0,8 \times 0,5^n \\ 0,2 + 0,8 \times 0,5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

En particulier, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

e) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,8$. Au bout d'un grand nombre de jours, la probabilité de ne pas fumer un jour donné est environ $0,8$ et donc la probabilité de fumer un jour donné est environ $0,2$.

Ainsi, à long terme, il n'est pas du tout certain que le fumeur arrêtera de fumer.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.