France métropolitaine, Réunion 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie 1

1) a) Soient c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\ dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d = \left(-e^{-\lambda d}\right) - \left(-e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}.$$

b) D'après la question précédente,

$$P(X > 20) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 1 - \left(e^0 - e^{-20\lambda}\right) = 1 - \left(1 - e^{-20\lambda}\right) = e^{-20\lambda}.$$

Par suite,

$$P(X > 20) = 0,05 \Leftrightarrow e^{-20\lambda} = 0,05 \Leftrightarrow -20\lambda = \ln(0,05) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,05)}{20}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0,15 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

c) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Donc, l'espérance de X est

$$E(X) = \frac{1}{-\ln(0,05)/20} = -\frac{20}{\ln(0,05)} = 6,676 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

d) D'après la question a), $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-0,15\times10} - e^{-0,15\times20} = e^{-1,5} - e^{-3} = 0,173$ arrondi à 10^{-3}.

e) $P(X > 18) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18) = 1 - \left(1 - e^{-0,15\times18}\right) = e^{-2,7} = 0,067$ arrondi à 10^{-3}.

2) a) La calculatrice donne $P(20 \leqslant X \leqslant 21) = 0,015$ arrondi à 10^{-3}.

b) La calculatrice donne $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21) = 0,010$ arrondi à 10^{-3}.

Partie 2

1) La probabilité demandée est $0,015 + 0,010 = 0,025$

2) En notant R l'événement « le bon est rouge », V l'événement « le bon est vert » et enfin M l'événement « le montant du bon d'achat est supérieur ou égal à 30 euros », la formule des probabilités totales fournit

$$\begin{aligned} P(M) &= P(R) \times P_R(M) + P(V) \times P_V(M) \\ &= \frac{1}{4} \times 0,025 + \frac{3}{4} \times 0,067 = \frac{1}{4}(0,025 + 3 \times 0,067) = 0,0565 \\ &= 0,057 \text{ arraondi à } 10^{-3}. \end{aligned}$$

3) Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% correspondant à la situation. Ici, $n = 200$ et $p = 0,057$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 11,4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 188,6 \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[0,057 - 1,96\frac{\sqrt{0,057(1-0,057)}}{\sqrt{200}}, 0,057 + 1,96\frac{\sqrt{0,057(1-0,057)}}{\sqrt{200}}\right] = [0,024; 0,090].$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{6}{200} = 0,03$. f appartient à l'intervalle de fluctuation et donc les doutes du directeur ne sont pas justifiés.

EXERCICE 2

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2-0, (-1)-(-1), 5-5)$ ou encore $(2,0,0)$. On en déduit que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI}$ puis que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OI}$ et donc que

$$\boxed{\text{la droite (AB) est parallèle à la droite (OI).}}$$

b) Les points C et D appartiennent au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x = 11$ et donc la droite (CD) est contenue dans ce plan. D'autre part, le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x = 11$ est parallèle au plan (OJK).

$$\boxed{\text{La droite (CD) est dans le plan } \mathscr{P} : x = 11\text{, plan qui est parallèle à (OJK).}}$$

c) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - 11 = 0$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,0,0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OI}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(2,0,0)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

La droite (AB) est la droite passant par $A(0,-1,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1,0,0)$. Un système d'équations paramétriques de (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M_t(t,-1,5)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $t = 11$. Pour $t = 11$, on obtient le point $E(11,-1,5)$.

$$\boxed{\text{La droite (AB) est perpendiculaire au plan } \mathscr{P} \text{ au point } E(11,-1,5).}$$

d) La droite (CD) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales et en particulier, les droites (AB) et (CD) sont sécantes ou non coplanaires.

Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point, ce point est nécessairement un point de la droite (AB) qui est dans $\mathscr{P}$ c'est-à-dire le point E. Donc, les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si le point E appartient la droite (CD).

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont $(0,4,3)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont $(0,-1,4)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc le point E n'appartient pas à la droite (CD). Finalement,

$$\boxed{\text{les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.}}$$

2) a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M_tN_t^2 &= (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2 = t^2 - 22t + 121 + 0,64t^2 + 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16 \\ &= 2t^2 - 25,2t + 138. \end{aligned}$$

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 2t^2 - 25,2t + 138$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = 4t - 25,2$.
La fonction f' est négative sur $\left]-\infty, \dfrac{25,2}{4}\right] =]-\infty; 6,3]$ et positive sur $[6,3; +\infty[$.
Par suite, la fonction f admet un minimum en $t_0 = 6,3$. Puisque la distance M_tN_t est minimale si et seulement si $M_tN_t^2 = f(t)$ est minimal, la distance M_tN_t est minimale à l'instant $t_0 = 6,3$ s.

EXERCICE 3

1) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 64 = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0$.
L'équation (E) admet donc deux solutions complexes non réelles conjuguées

$$z_1 = \frac{-(-8) + i\sqrt{3 \times 64}}{2} = \frac{8 + 8i\sqrt{3}}{2} = 4 + 4i\sqrt{3}$$

et $z_2 = \overline{z_1} = 4 - 4i\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ est } \left\{4 + 4i\sqrt{3}, 4 - 4i\sqrt{3}\right\}.}$$

2) a) $|a| = \left|4\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = 4\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{1+3} = 4\sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$ puis

$$a = 8\left(\frac{4}{8} + i\frac{4\sqrt{3}}{8}\right) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

$$\boxed{|a| = 8 \text{ et un argument de } a \text{ est } \frac{\pi}{3}.}$$

b) Par suite, $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \overline{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\boxed{a = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

c) On a déjà $|a| = 8$ et $|b| = 8$. Enfin, $|c| = |8i| = 8|i| = 8$. Donc,

$$\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ sont sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 8.}$$

d) Voir figure page suivante.

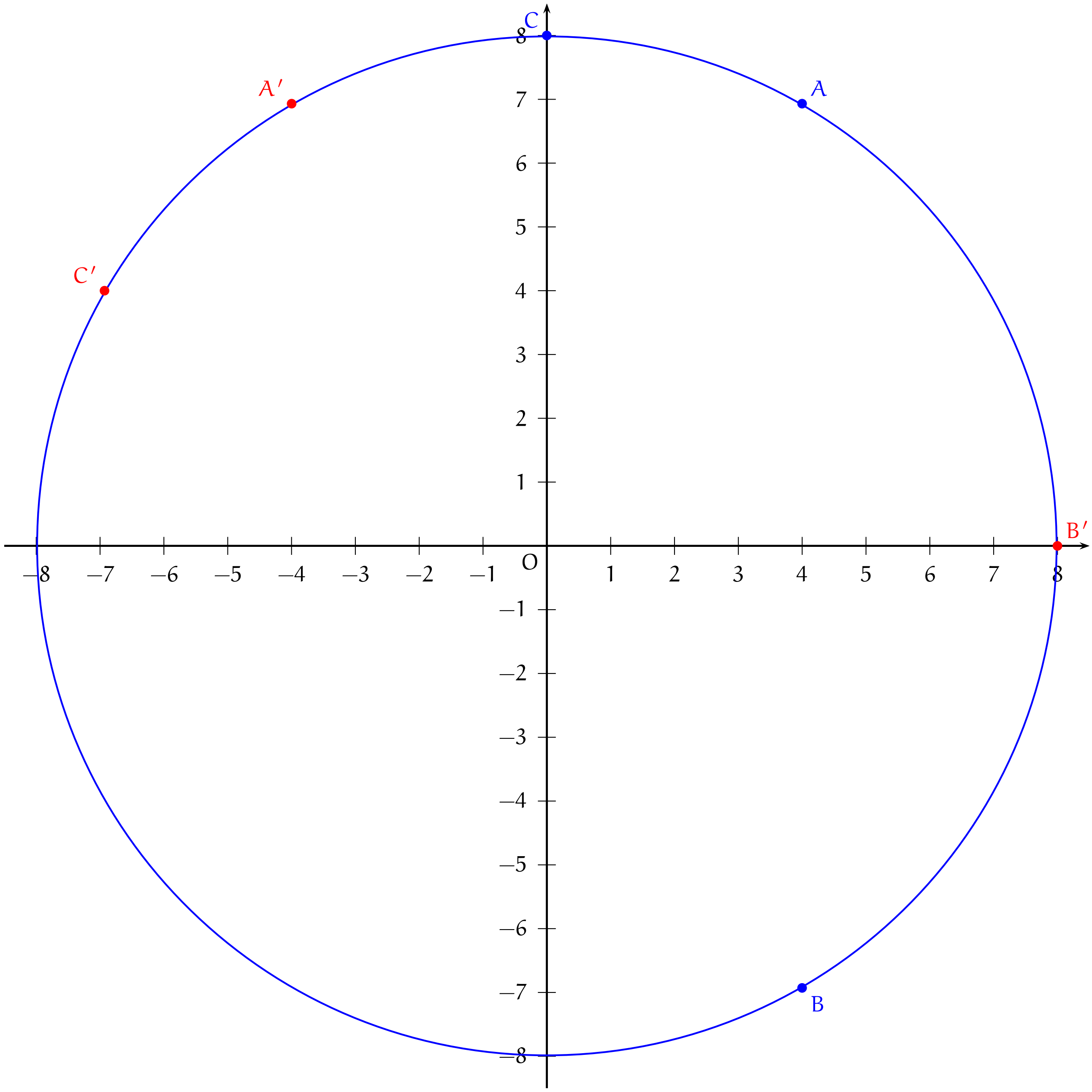
3) a) $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^0 = 8$.

$$\boxed{b' = 8.}$$

b) $a' = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

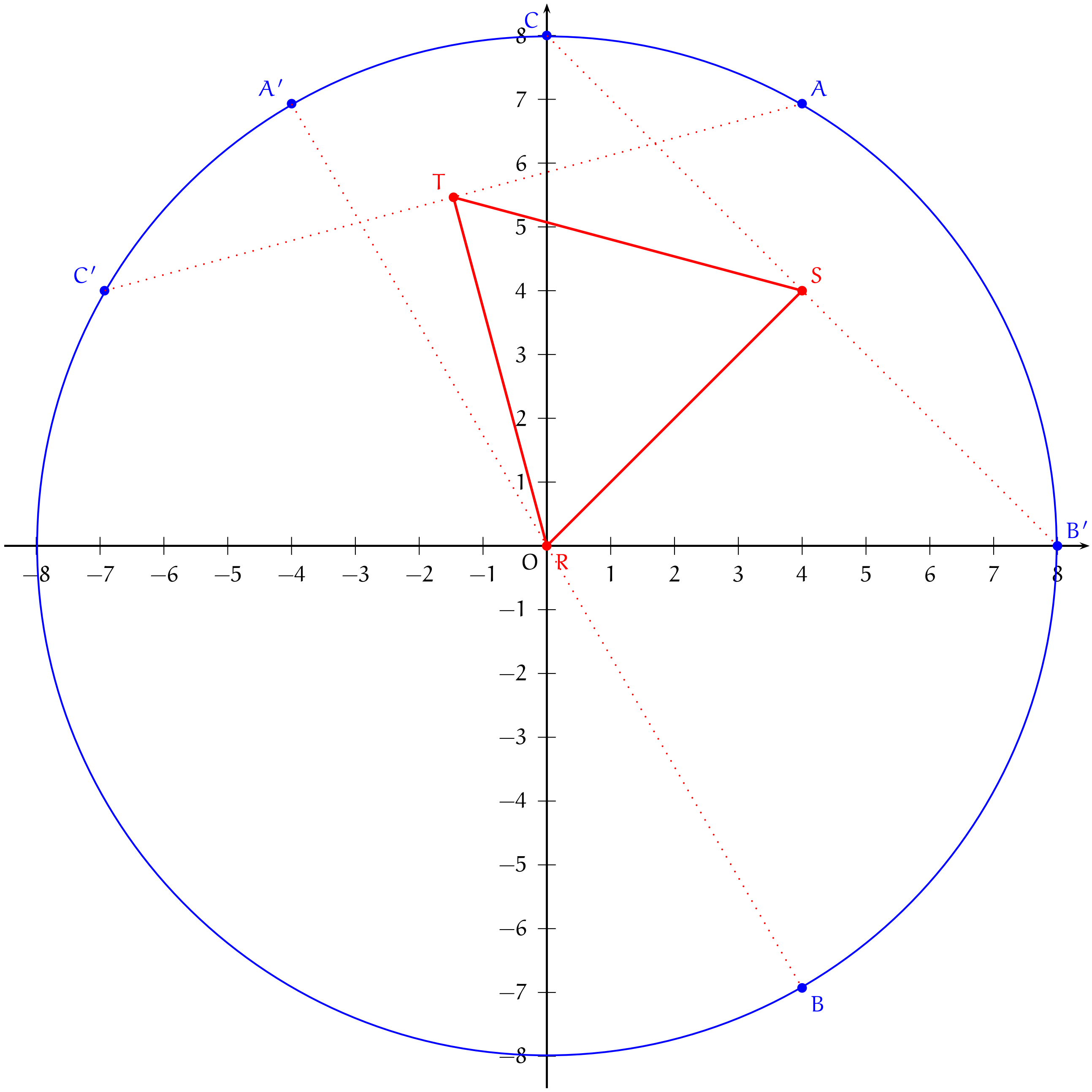
$$\boxed{|a'| = 8 \text{ et un argument de } a' \text{ est } \frac{2\pi}{3}.}$$

Figure.



4) a) $r = \dfrac{a' + b}{2} = \dfrac{-4 + 4i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 0$. $s = \dfrac{b' + c}{2} = \dfrac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i$.

b) Figure.



Il semble que le triangle RST soit équilatéral.

EXERCICE 4.

Partie 1

1) f est dérivable sur $[0,20]$ et pour tout réel x de $[0,20]$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,20],\ f'(x) = \ln(x+1) - 2.}$$

2) Soit $x \in [0,20]$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \\ &\Leftrightarrow x+1 > e^2 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x > e^2 - 1, \end{aligned}$$

avec $e^2 - 1 = 6,38\ldots$ de sorte que $0 < e^2 - 1 < 20$. De même, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$.
D'autre part, $f(0) = \ln(1) + 7 = 7$, $f(20) = 21\ln(21) - 53 = 10,9\ldots$ et enfin,

$$f\left(e^2 - 1\right) = e^2 \ln\left(e^2\right) - 3\left(e^2 - 1\right) + 7 = 2e^2 - 3e^2 + 10 = 10 - e^2 = 2,6\ldots$$

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		$e^2 - 1$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	7	$\searrow$	$2,6\ldots$	$\nearrow$	$10,9\ldots$

3) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 est $f'(0)$ avec $f'(0) = \ln(1) - 2 = -2$.

4) La fonction g est une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$ sur $[0,20]$ et donc, une primitive de la fonction f sur $[0,20]$ est la fonction F définie sur $[0,20]$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x.$$

Partie 2

1) D'après l'étude des variations de la fonction f, la différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est

$$f(20) - f\left(e^2 - 1\right) = (21\ln(21) - 53) - \left(10 - e^2\right) = 21\ln(21) + e^2 - 63 = 8,3\ldots$$

La proposition P_1 est donc exacte.

D'après la question 3) de la partie, l'inclinaison de la piste en B est $|f'(0)| = 2$. Le double de l'inclinaison de la piste en C est

$$2\,|f'(20)| = 2(\ln(21) - 2) = 2,08\ldots.$$

La proposition P_2 est donc vraie.

2) Deux fois l'aire de la face latérale $ODBC$ exprimée en m^2 est

$$\begin{aligned} 2\int_0^{20} f(x)\ dx &= 2\,[F(x)]_0^{20} = 2\,(F(20) - F(0)) = 2F(20) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}21^2\ln(21) - \frac{7}{4} \times 20^2 + \frac{13}{2} \times 20\right) = 441\ln(21) - 1140 \end{aligned}$$

puis l'aire de la face latérale $OAB'B$ exprimée en m^2 est

$$10 \times f(0) = 70,$$

et l'aire de la face latérale $CD'C'C$ exprimée en m^2 est

$$10 \times f(20) = 210 \ln(21) - 530.$$

L'aire totale à peindre en rouge exprimée en m^2 est

$$441 \ln(21) - 1140 + 70 + 210 \ln(21) - 530 = 651 \ln(21) - 1600.$$

La quantité de peinture nécessaire est

$$\frac{651 \ln(21) - 1600}{5} = 76,3\ldots$$

Le nombre minimum de litres de peinture rouge nécessaire est 77 litres à 1 litre près.

3) a) Pour $0 \leqslant k \leqslant 19$,

$$B_kB_{k+1} = \sqrt{\left(x_{B_{k+1}} - x_{B_k}\right)^2 + \left(y_{B_{k+1}} - y_{B_k}\right)^2} = \sqrt{(k+1-k)^2 + (f(k+1) - f(k))^2}$$
$$= \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}.$$

b) Algorithme complété.

Variables Fonction	S : réel K : entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de 0 à 19 S prend pour valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(K+1) - f(K))^2}$ Fin Pour
Sortie	Afficher S