France métropolitaine, Réunion 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie 1

1) a) Soient c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d = \left(-e^{-\lambda d}\right) - \left(-e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}.$$

b) D'après la question précédente,

$$P(X > 20) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 1 - \left(e^0 - e^{-20\lambda}\right) = 1 - \left(1 - e^{-20\lambda}\right) = e^{-20\lambda}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(X > 20) = 0,05 &\Leftrightarrow e^{-20\lambda} = 0,05 \Leftrightarrow -20\lambda = \ln(0,05) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,05)}{20} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0,15 \text{ arrondi à } 10^{-3}. \end{aligned}$$

c) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Donc, l'espérance de X est

$$E(X) = \frac{1}{-\ln(0,05)/20} = -\frac{20}{\ln(0,05)} = 6,676 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

d) D'après la question a), $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-0,15\times 10} - e^{-0,15\times 20} = e^{-1,5} - e^{-3} = 0,173$ arrondi à 10^{-3}.

e) $P(X > 18) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18) = 1 - \left(1 - e^{-0,15\times 18}\right) = e^{-2,7} = 0,067$ arrondi à 10^{-3}.

2) a) La calculatrice donne $P(20 \leqslant X \leqslant 21) = 0,015$ arrondi à 10^{-3}.

b) La calculatrice donne $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21) = 0,010$ arrondi à 10^{-3}.

Partie 2

1) La probabilité demandée est $0,015 + 0,010 = 0,025$

2) En notant R l'événement « le bon est rouge », V l'événement « le bon est vert » et enfin M l'événement « le montant du bon d'achat est supérieur ou égal à 30 euros », la formule des probabilités totales fournit

$$\begin{aligned} P(M) &= P(R) \times P_R(M) + P(V) \times P_V(M) \\ &= \frac{1}{4} \times 0,025 + \frac{3}{4} \times 0,067 = \frac{1}{4}(0,025 + 3 \times 0,067) = 0,0565 \\ &= 0,057 \text{ arraondi à } 10^{-3}. \end{aligned}$$

3) Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% correspondant à la situation. Ici, $n = 200$ et $p = 0,057$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 11,4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 188,6 \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[0,057 - 1,96\frac{\sqrt{0,057(1-0,057)}}{\sqrt{200}}, 0,057 + 1,96\frac{\sqrt{0,057(1-0,057)}}{\sqrt{200}}\right] = [0,024; 0,090].$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{6}{200} = 0,03$. f appartient à l'intervalle de fluctuation et donc les doutes du directeur ne sont pas justifiés.

EXERCICE 2

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2-0, (-1)-(-1), 5-5)$ ou encore $(2, 0, 0)$. On en déduit que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI}$ puis que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OI}$ et donc que

$$\boxed{\text{la droite (AB) est parallèle à la droite (OI).}}$$

b) Les points C et D appartiennent au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x = 11$ et donc la droite (CD) est contenue dans ce plan. D'autre part, le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x = 11$ est parallèle au plan (OJK).

$$\boxed{\text{La droite (CD) est dans le plan } \mathscr{P} : x = 11\text{, plan qui est parallèle à (OJK).}}$$

c) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - 11 = 0$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 0, 0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OI}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(2, 0, 0)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

La droite (AB) est la droite passant par $A(0, -1, 5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1, 0, 0)$. Un système d'équations paramétriques de (AB) est $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M_t(t, -1, 5)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $t = 11$. Pour $t = 11$, on obtient le point $E(11, -1, 5)$.

$$\boxed{\text{La droite (AB) est perpendiculaire au plan } \mathscr{P} \text{ au point } E(11, -1, 5).}$$

d) La droite (CD) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales et en particulier, les droites (AB) et (CD) sont sécantes ou non coplanaires.

Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point, ce point est nécessairement un point de la droite (AB) qui est dans $\mathscr{P}$ c'est-à-dire le point E. Donc, les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si le point E appartient la droite (CD).

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont $(0, 4, 3)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont $(0, -1, 4)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc le point E n'appartient pas à la droite (CD). Finalement,

$$\boxed{\text{les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.}}$$

2) a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M_tN_t^2 &= (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2 = t^2 - 22t + 121 + 0,64t^2 + 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16 \\ &= 2t^2 - 25,2t + 138. \end{aligned}$$

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 2t^2 - 25,2t + 138$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = 4t - 25,2$. La fonction f' est négative sur $\left]-\infty, \dfrac{25,2}{4}\right] =]-\infty; 6,3]$ et positive sur $[6,3; +\infty[$.
Par suite, la fonction f admet un minimum en $t_0 = 6,3$. Puisque la distance M_tN_t est minimale si et seulement si $M_tN_t^2 = f(t)$ est minimal, la distance M_tN_t est minimale à l'instant $t_0 = 6,3$ s.

EXERCICE 3

1) a) $7\times 3-5\times 4=21-20=1$. Donc le couple $(x_0,y_0)=(3,4)$ est solution de l'équation (E).

b) Soit (x,y) un couple d'entiers relatifs.

$$\begin{aligned}(x,y)\text{ solution de }(E) &\Leftrightarrow 7x-5y=1\Leftrightarrow 7x-5y=7x_0-5y_0\Leftrightarrow 7\left(x-x_0\right)=5\left(y-y_0\right)\\ &\Leftrightarrow 7(x-3)=5(y-4).\end{aligned}$$

c) Soit (x,y) un couple d'entiers relatifs solution de (E). Nécessairement, l'entier 5 divise l'entier $5(y-4)$ et donc l'entier 5 divise l'entier $7(x-3)$. D'autre part, les entiers 5 et 7 sont premiers entre eux car les entiers 5 et 7 sont des nombres premiers distincts. D'après le théorème de Gauss, l'entier 5 divise l'entier $x-3$. On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que $x-3=5k$ ou encore $x=5k+3$.

Soient alors k un entier relatif puis $x=5k+3$. Soit y un entier relatif.

$$(x,y)\text{ solution de }(E)\Leftrightarrow 7(5k+3-3)=5(y-4)\Leftrightarrow 7k=y-4\Leftrightarrow y=7k+4.$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de (E) sont les couples de la forme $(5k+3,7k+4)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

2) Il existe nécessairement un entier relatif k tel que $x=5k+3$ et $y=7k+4$. On doit avoir $0\leqslant x+y\leqslant 25$ avec

$$0\leqslant x+y\leqslant 25\Leftrightarrow 0\leqslant 12k+7\leqslant 25\Leftrightarrow -\frac{7}{12}\leqslant k\leqslant\frac{18}{12}\Leftrightarrow 0\leqslant k\leqslant 1.$$

Ainsi, nécessairement (x,y) est l'un des deux couples $(3,4)$ ou $(8,11)$. Réciproquement ces couples conviennent et fournissent les nombres de jetons rouges, verts et blancs possibles :

- 3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs ;
- 8 jetons rouges, 11 jetons verts et 6 jetons blancs.

3) $X_0=\begin{pmatrix}a_0 & b_0 & c_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

On note A_n l'événement « le pion est sur le sommet A à l'instant n », B_n l'événement « le pion est sur le sommet B à l'instant n » et C_n l'événement « le pion est sur le sommet C à l'instant n ».

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=p\left(A_{n+1}\right)=p\left(A_n\right)\times p_{A_n}\left(A_{n+1}\right)+p\left(B_n\right)\times p_{B_n}\left(A_{n+1}\right)+p\left(C_n\right)\times p_{C_n}\left(A_{n+1}\right)\\ &=\frac{18}{25}a_n+\frac{3}{25}b_n+\frac{3}{25}c_n=0,72a_n+0,12b_n+0,12c_n.\end{aligned}$$

(Par exemple, $p_{A_n}\left(A_{n+1}\right)$ est la probabilité de tirer un jeton blanc c'est-à-dire $\frac{18}{25}=0,72$.) De même

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=p\left(B_{n+1}\right)=p\left(A_n\right)\times p_{A_n}\left(B_{n+1}\right)+p\left(B_n\right)\times p_{B_n}\left(B_{n+1}\right)+p\left(C_n\right)\times p_{C_n}\left(B_{n+1}\right)\\ &=\frac{3}{25}a_n+\frac{18}{25}b_n+\frac{4}{25}c_n=0,12a_n+0,72b_n+0,16c_n,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}c_{n+1}&=p\left(C_{n+1}\right)=p\left(A_n\right)\times p_{A_n}\left(C_{n+1}\right)+p\left(B_n\right)\times p_{B_n}\left(C_{n+1}\right)+p\left(C_n\right)\times p_{C_n}\left(C_{n+1}\right)\\ &=\frac{4}{25}a_n+\frac{4}{25}b_n+\frac{18}{25}c_n=0,16a_n+0,16b_n+0,72c_n.\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}X_nT&=\begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,72 & 0,12 & 0,16\\ 0,12 & 0,72 & 0,16\\ 0,12 & 0,16 & 0,72\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0,72a_n+0,12b_n+0,12c_n & 0,12a_n+0,72b_n+0,16c_n & 0,16a_n+0,16b_n+0,72c_n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}.\end{aligned}$$

On a montré que pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=X_nT$.

4) a) La calculatrice fournit $P=\left(P^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 7 & 4\\ 1 & -3 & 4\\ 1 & -3 & -7\end{pmatrix}$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $T^n = PD^nP^{-1}$.

• Pour $n = 0$, $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_3 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I_3 = T^0$. La formule proposée est donc vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $T^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n \times T \\ &= P \times D^n \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= P \times D^n \times I_3 \times D \times P^{-1} = P \times D^n \times D \times P^{-1} \\ &= P \times D^{n+1} \times P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $T^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

c) Pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$.

5) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = X_n = X_0T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

et donc $a_n = \alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $b_n = \beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$. Enfin,

$$\begin{aligned} c_n = 1 - a_n - b_n &= \frac{110}{110} - \frac{33 + 77 \times 0,6^n}{110} - \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110} = \frac{40 - 40 \times 0,56^n}{110} \\ &= \frac{4 - 4 \times 0,56^n}{11}. \end{aligned}$$

b) Puisque $-1 < 0,6 < 1$ et que $-1 < 0,56 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,56^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{3}{10}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \dfrac{4}{11}$.

c) $\dfrac{3}{10} = 0,3$, $\dfrac{37}{110} = 0,33\ldots$ et $\dfrac{4}{11} = 0,36\ldots$. Donc $\dfrac{3}{10} < \dfrac{37}{110} < \dfrac{4}{11}$. Après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire, le sommet sur lequel le pion a le plus de chances de se trouver est le sommet C.

EXERCICE 4.

Partie 1

1) f est dérivable sur $[0,20]$ et pour tout réel x de $[0,20]$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,20],\ f'(x) = \ln(x+1) - 2.}$$

2) Soit $x \in [0,20]$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \\ &\Leftrightarrow x+1 > e^2 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x > e^2 - 1, \end{aligned}$$

avec $e^2 - 1 = 6,38\ldots$ de sorte que $0 < e^2 - 1 < 20$. De même, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$.
D'autre part, $f(0) = \ln(1) + 7 = 7$, $f(20) = 21\ln(21) - 53 = 10,9\ldots$ et enfin,

$$f\left(e^2 - 1\right) = e^2 \ln\left(e^2\right) - 3\left(e^2 - 1\right) + 7 = 2e^2 - 3e^2 + 10 = 10 - e^2 = 2,6\ldots$$

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		e^2-1		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	7	$\searrow$	$2,6\ldots$	$\nearrow$	$10,9\ldots$

3) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 est $f'(0)$ avec $f'(0) = \ln(1) - 2 = -2$.

4) La fonction g est une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$ sur $[0,20]$ et donc, une primitive de la fonction f sur $[0,20]$ est la fonction F définie sur $[0,20]$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x.$$

Partie 2

1) D'après l'étude des variations de la fonction f, la différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est

$$f(20) - f\left(e^2 - 1\right) = (21\ln(21) - 53) - \left(10 - e^2\right) = 21\ln(21) + e^2 - 63 = 8,3\ldots$$

La proposition P_1 est donc exacte.

D'après la question 3) de la partie, l'inclinaison de la piste en B est $|f'(0)| = 2$. Le double de l'inclinaison de la piste en C est

$$2\left|f'(20)\right| = 2(\ln(21) - 2) = 2,08\ldots.$$

La proposition P_2 est donc vraie.

2) Deux fois l'aire de la face latérale $ODBC$ exprimée en m^2 est

$$\begin{aligned} 2\int_0^{20} f(x)\,dx &= 2\left[F(x)\right]_0^{20} = 2\left(F(20) - F(0)\right) = 2F(20) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}21^2\ln(21) - \frac{7}{4} \times 20^2 + \frac{13}{2} \times 20\right) = 441\ln(21) - 1140 \end{aligned}$$

puis l'aire de la face latérale $OAB'B$ exprimée en m^2 est

$$10 \times f(0) = 70,$$

et l'aire de la face latérale $CD'C'C$ exprimée en m^2 est

$$10 \times f(20) = 210\ln(21) - 530.$$

L'aire totale à peindre en rouge exprimée en m^2 est

$$441\ln(21) - 1140 + 70 + 210\ln(21) - 530 = 651\ln(21) - 1600.$$

La quantité de peinture nécessaire est

$$\frac{651\ln(21) - 1600}{5} = 76,3\ldots$$

Le nombre minimum de litres de peinture rouge nécessaire est 77 litres à 1 litre près.

3) a) Pour $0 \leqslant k \leqslant 19$,

$$\begin{aligned} B_kB_{k+1} &= \sqrt{\left(x_{B_{k+1}} - x_{B_k}\right)^2 + \left(y_{B_{k+1}} - y_{B_k}\right)^2} = \sqrt{(k+1-k)^2 + (f(k+1) - f(k))^2} \\ &= \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}. \end{aligned}$$

b) Algorithme complété.

Variables Fonction	S : réel K : entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de 0 à 19 S prend pour valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(K+1) - f(K))^2}$ Fin Pour
Sortie	Afficher S

