Asie 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de flèches qui atteignent la cible. X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues, « la flèche atteint la cible »avec une probabilité $p = 0,8$ et « la flèche n'atteint pas la cible »avec une probabilité $1 - p = 0,2$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.

La probabilité demandée est $P(X \geqslant 3)$. La calculatrice fournit

$$\begin{aligned}P(X \geqslant 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} 0,8^3 0,2^1 + \binom{4}{4} 0,8^4 0,2^0 = 0,8^4 + 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 2 \times 0,8^4 \\ &= 0,819 \text{ arrondi au millième.}\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geqslant 3) = 0,819 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) Dans cette question, on note n le nombre de flèches tirées et X la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. On sait que $E(X) = np = 0,8n$. On veut que cette espérance soit égale à 12.

$$E(X) = 12 \Leftrightarrow 0,8n = 12 \Leftrightarrow n = \frac{12}{0,8} \Leftrightarrow n = 15.$$

$$\boxed{\text{Le concurrent doit prévoir 15 flèches pour atteindre 12 fois la cible en moyenne.}}$$

Partie B

1) La probabilité demandée est $P((X < -10) \cup (X > 10)) = 1 - P(-10 \leqslant X \leqslant 10) = 1 - P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$. La calculatrice (ou le cours) fournit $P(-10 \leqslant X \leqslant 10) = 0,683$ arrondi au millième ou encore

$$\boxed{P((X < -10) \cup (X > 10)) = 0,317 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) Soit x l'abscisse du bord vertical droit de la cible. On veut $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 0,6$. Or

$$\begin{aligned}P(-x \leqslant X \leqslant x) &= P(X \leqslant x) - P(X \leqslant -x) = P(X \leqslant x) - P(X \geqslant x) = P(X \leqslant x) - (1 - P(X \leqslant x)) \\ &= 2P(X \leqslant x) - 1,\end{aligned}$$

puis $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 0,6 \Leftrightarrow 2P(X \leqslant x) - 1 = 0,6 \Leftrightarrow P(X \leqslant x) = 0,8$. La calculatrice fournit alors $x = 8,4$ arrondi au dixième.

Pour quer la probabilité considérée soit égale à $0,6$, il faut et il suffit que les bords verticaux aient pour équations respectives $x = 8,4$ arrondi au dixième et $x = -8,4$ arrondi au dixième.

Partie C

1) Soit a un réel positif.

$$\begin{aligned}P(T \leqslant a) &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a} \\ &= 1 - e^{-0,0001a}\end{aligned}$$

et aussi

$$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-0,0001a}\right) = e^{-0,0001a}.$$

La probabilité demandée est $P(T \geqslant 2000)$.

$$P(T \geqslant 2000) = e^{-0,0001 \times 2000} = e^{-0,2} = 0,819 \text{ arrondi au millième.}$$

$$\boxed{P(T \geqslant 2000) = 0,819 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) a) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$F'(t) = (-1)e^{-\lambda t} + \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = f(t).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Soit x un réel positif.

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \left[\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(-\lambda x)e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}.$$

Déjà, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \to +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{X \to -\infty} X e^X = 0.$$

On en déduit que

$$E(T) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{0}{\lambda} - \frac{0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ici, $\lambda = 10^{-4}$ et donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 10^4$. Ainsi, l'espérance de durée de vie du panneau électrique est de $10\,000$ heures.

EXERCICE 2

1) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1, 1, 1)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $(7, -2, 1)$.

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 1 \times 7 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 6.$$

En particulier, $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} \neq 0$ ou encore, les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas orthogonaux. On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires. L'affirmation 1 est fausse.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles. On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite.

Notons $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = -3t \\ y = -2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $M(-3t, -2t + 1, -3t + 4)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de $\mathscr{D}$.

$$x_M + y_M + z_M - 5 = -3t - 2t + 1 - 3t + 4 - 5 = -8t.$$

Par exemple, si $t = 1$, $x_M + y_M + z_M - 5 \neq 0$ ou encore le point $(-3, -1, 1)$ est un point de $\mathscr{D}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$. On en déduit que la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ n'est pas la droite $\mathscr{D}$. La proposition 2 est fausse.

3) Ici, $n = 312$ et $f = \dfrac{223}{312}$. On note que $n \geqslant 30$, $nf = 223 \geqslant 5$ et $n(1 - f) = 89 \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}, \frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}\right] = [0,658; 0,772]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La proposition 3 est probablement vraie.

4) Décrivons les différentes de l'algorithme.

- $a = 1$ et $b = 2$.
- $b - a > 0,3$ et donc $x = 1,5$.
- $f(a)f(x) = f(1)f(1,5) = (-2) \times (-0,75) > 0$. Donc $a = 1,5$ et $b = 2$.
- $b - a > 0,3$ et donc $x = 1,75$.
- $f(a)f(x) = (-0,75) \times (1) < 0$. Donc $a = 1,5$ et $b = 1,75$.
- $b - a \leqslant 0,3$ et donc $x = \dfrac{1,5 + 1,75}{2} = 1,625$.
- L'algorithme affiche $1,625$. La proposition 4 est fausse.

EXERCICE 3

Partie A

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Pour tout x de $[0,1]$, $x \geqslant 0$ et $e^{n(x-1)} \geqslant 0$ puis pour tout x de $[0,1]$, $x + e^{n(x-1)} \geqslant 0$. Donc, la fonction f_n est positive sur $[0,1]$.

• La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout x de $[0,1]$,

$$f_n'(x) = 1 + ne^{n(x-1)}.$$

Pour tout x de $[0,1]$, $ne^{n(x-1)} \geqslant 0$ puis $1 + ne^{n(x-1)} \geqslant 0$. La fonction f_n' est positive sur $[0,1]$ et donc la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$.

2) Pour tout entier naturel n, $f_n(1) = 1 + e^0 = 2$. Donc, le point $A(1,2)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.

3) Il semble que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ tende vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Démontrons ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ est

$$f_n'(x_A) = f_n'(1) = 1 + ne^0 = n + 1.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$, le résultat est démontré.

Partie B

1) Pour tout entier naturel n, $u_n = f_n(1) = 2$. Dans le cas où $x = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en particulier convergente, de limite 2.

2) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout entier naturel n, $e^{n(x-1)} = \left(e^{x-1}\right)^n$. La suite $\left(\left(e^{x-1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{x-1}$. Puisque $x < 1$, on a $x - 1 < 0$ puis $0 < e^{x-1} < 1$ et en particulier $-1 < q < 1$. On sait alors que

$$\lim_{n \to +\infty} e^{n(x-1)} = \lim_{n \to +\infty} q^n = 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x + 0 = x$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } [0,1[,\ \lim_{n \to +\infty} u_n = x.}$$

Partie C

Il semble que, quand n tend vers $+\infty$, A_n tende vers l'aire du triangle dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ ou encore il semble que, quand n tend vers $+\infty$, A_n tende vers $\dfrac{1}{2}$. Démontrons ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$. Donc,

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \left(x + e^{n(x-1)}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{n}e^{n(x-1)}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}e^0\right) - \left(0 + \frac{1}{n}e^{-n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-n}}{n}. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - e^{-n}\right) = 1 - 0 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. En divisant, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-n}}{n} = 0$ et finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{1}{2}.}$$

EXERCICE 4.

Partie A

1) $\dfrac{8\times 9}{2} = \dfrac{72}{2} = 36$. Donc 36 est un nombre triangulaire.

2) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n \text{ est le carré d'un entier} &\Leftrightarrow \text{il existe } p\in\mathbb{N} \text{ tel que } \frac{n(n+1)}{2} = p^2 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } p\in\mathbb{N} \text{ tel que } n(n+1) = 2p^2 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } p\in\mathbb{N} \text{ tel que } n^2+n = 2p^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} n^2+n=2p^2 &\Leftrightarrow 4n^2+4n=8p^2 \Leftrightarrow 4n^2+4n+1=8p^2+1 \Leftrightarrow (2n+1)^2=8p^2+1 \\ &\Leftrightarrow (2n+1)^2-8p^2=1. \end{aligned}$$

Donc, $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement si il existe un entier p tel que $(2n+1)^2-8p^2=1$.

Partie B

1) $1^2-8\times 0^2 = 1-0 = 1$. Donc, le couple $(1,0)$ est un couple d'netiers naturels inférieurs ou égaux à 10 et solution de l'équation (E).
$3^2-8\times 1^2 = 9-8 = 1$. Donc, le couple $(3,1)$ est un couple d'netiers naturels inférieurs ou égaux à 10 et solution de l'équation (E).

2) Soit (x,y) un couple d'entiers relatifs non nuls et solution de (E). Alors

$$x\times x + (-8y)\times y = 1.$$

Puisque x et $-8y$ sont des entiers relatifs, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ux+vy=1$. Le théorème de Bézout permet d'affirmer que les entiers x et y sont premiers entre eux.

Partie C

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+8y \\ x+3y \end{pmatrix}$. Donc, $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x+8y \\ y' = x+3y \end{array}\right.$.

2) La calculatrice fournit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x'-8y' \\ -x'+3y' \end{pmatrix}.$$

Donc, $\left\{\begin{array}{l} x = 3x'-8y' \\ y = -x'+3y' \end{array}\right.$.

3) Soit (x,y) un couple d'entiers relatifs.

$$x'^2-8y'^2 = (3x+8y)^2-8(x+3y)^2 = 9x^2+48xy+64y^2-8x^2-48xy-72y^2 = x^2-8y^2.$$

Donc, $x^2-8y^2=1 \Leftrightarrow x'^2-8y'^2=1$ ou encore (x,y) est solution de (E) si et seulement si (x',y') est solution de (E).

4) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, (x_n,y_n) est un couple d'entiers relatifs solution de (E).

- L'affirmation est vraie quand $n=0$ d'après la question 1) de la partie B.
- Soit $n\geqslant 0$. Supposons que (x_n,y_n) soit un couple d'entiers relatifs solution de (E). D'après la question précédente, (x_{n+1},y_{n+1}) est un couple d'entiers relatifs solution de (E).

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, (x_n,y_n) est un couple d'entiers relatifs solution de (E).

Partie D

Soit k un entier naturel. La caluculatrice fournit

$$\frac{k(k+1)}{2}\geqslant 2015 \Leftrightarrow k(k+1)\geqslant 4030 \Leftrightarrow k\geqslant 63 \Leftrightarrow 2k+1\geqslant 127.$$

Déterminons alors un couple d'entiers relatifs (x_n, y_n) solution de (E) tel que $x_n \geqslant 127$.

On a $(x_0, y_0) = (1, 0)$ puis $(x_1, y_1) = (3, 1)$ puis $(x_2, y_2) = (17, 6)$ puis $(x_3, y_3) = (99, 35)$ puis $(x_4, y_4) = (577, 204)$.
Ainsi, quand $2n + 1 = 577$ ou encore $n = 288$ et $p = 204$. On a $(2n + 1)^2 - 8p^2 = 1$.
D'après la question 2) de la partie A, on a encore $\dfrac{n(n+1)}{2} = p^2$ ce qui s'écrit explicitement

$$41616 = \frac{288 \times 289}{2} = 204^2.$$

41616 est un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.

