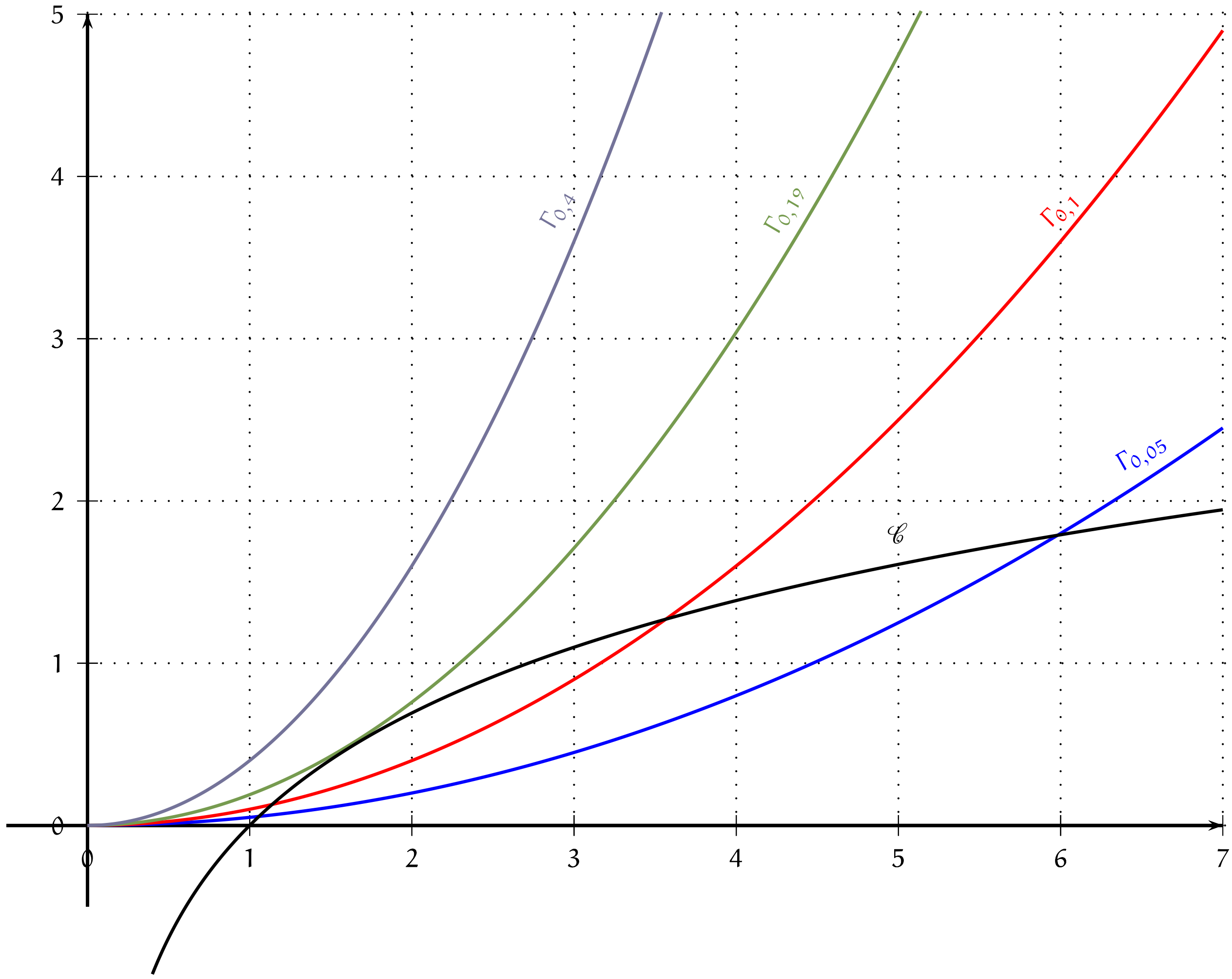
Antilles Guyane 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Graphes.



2) Il semble que si $a > 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a n'aient pas de point commun, si $a = 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a aient exactement un point commun et si $0 < a < 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a aient exactement deux points communs.

Partie B

1) Soient $x > 0$ puis M un point du plan d'abscisse x.

$$M \in \mathscr{C} \cap \Gamma_a \Leftrightarrow \ln(x) = ax^2 \Leftrightarrow \ln(x) - ax^2 = 0 \Leftrightarrow h_a(x) = 0.$$

Donc, les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a sont les solutions de l'équation $h_a(x) = 0$.

2) a) Pour tout réel x, $h_a'(x) = \dfrac{1}{x} - 2ax = \dfrac{1-2ax^2}{x}$. Sur $]0,+\infty[$, $h_a'(x)$ est du signe de $1-2ax^2$.

Pour $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 < \dfrac{1}{2a}$ (par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $[0,+\infty[$) puis $2ax^2 < 1$ et enfin $1-2ax^2 > 0$.

Pour $x > \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 > \dfrac{1}{2a}$ puis $2ax^2 > 1$ et enfin $1-2ax^2 < 0$.

Pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 = \dfrac{1}{2a}$ puis $1-2ax^2 = 0$.

En résumé, la fonction h_a' est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right[$, strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty\right[$ et s'annule en $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Pour $x > 0$,

$$h_a(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - ax\right).$$

Puisque $a > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} ax = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. En retranchant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - ax\right) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h_a(x) = -\infty.}$$

3) a) La fonction $h_{0,1}$ est continue et strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} h_{0,1}(x) = -\infty < 0$ et $h_{0,1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right) = \dfrac{-1-\ln(0,2)}{2} = 0,3\ldots > 0$.

Donc, la fonction $h_{0,1}$ s'annule une fois et une seule sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$.

b) Puisque l'équation $h_a(x) = 0$ admet exactement deux solutions, d'après la question 1), les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont exactement deux points d'intersection.

4) a) Le maximum de la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est

$$h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{\frac{1}{2(1/2e)}}\right) = h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 - \ln\left(\frac{2}{2e}\right)\right) = \frac{1}{2}(-1+\ln(e)) = 0.$$

b) D'après la question 2)a), la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est strictement croissante sur $\left]0, \sqrt{e}\right]$. Donc, pour $x \in \left]0, \sqrt{e}\right[$, $h_{\frac{1}{2e}}(x) < h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right) = 0$.
De même, la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est strictement décroissante sur $\left[\sqrt{e}, +\infty\right[$. Donc, pour $x \in \left]\sqrt{e}, +\infty\right[$, $h_{\frac{1}{2e}}(x) < h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right) = 0$.

En particulier, pour tout réel strictement positif x distinct de $\sqrt{e}$, $h_{\frac{1}{2e}}(x) \neq 0$. D'autre part, $h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right) = 0$. On en déduit que la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ s'annule une fois et une seule sur $]0, +\infty[$. D'après la question 1), les courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ ont un point d'intersection et un seul.

5) Si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2} > 0$, comme à la question 3), les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont au moins un point commun et si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2} = 0$, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont un point commun d'après la question 4). Enfin, si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2} < 0$, la fonction h_a a un maximuym strictement négatif. En particulier, la fonction h_a ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ ou encore les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont pas de point d'intersection. En résumé,

$$\begin{aligned}
\mathscr{C} \cap \Gamma_a = \varnothing &\Leftrightarrow \frac{-1-\ln(2a)}{2} < 0 \Leftrightarrow -1-\ln(2a) < 0 \Leftrightarrow 1+\ln(2a) > 0 \\
&\Leftrightarrow \ln(2a) > -1 \Leftrightarrow 2a > e^{-1} \\
&\Leftrightarrow a > \frac{1}{2e}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit $\lambda > 0$. Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt &= \left[-\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} + \left(0+\frac{1}{\lambda}\right)e^0 \\ &= -\frac{\lambda x+1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).\end{aligned}$$

2) Puisque $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim\limits_{y\to-\infty} y e^y = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$. Donc,

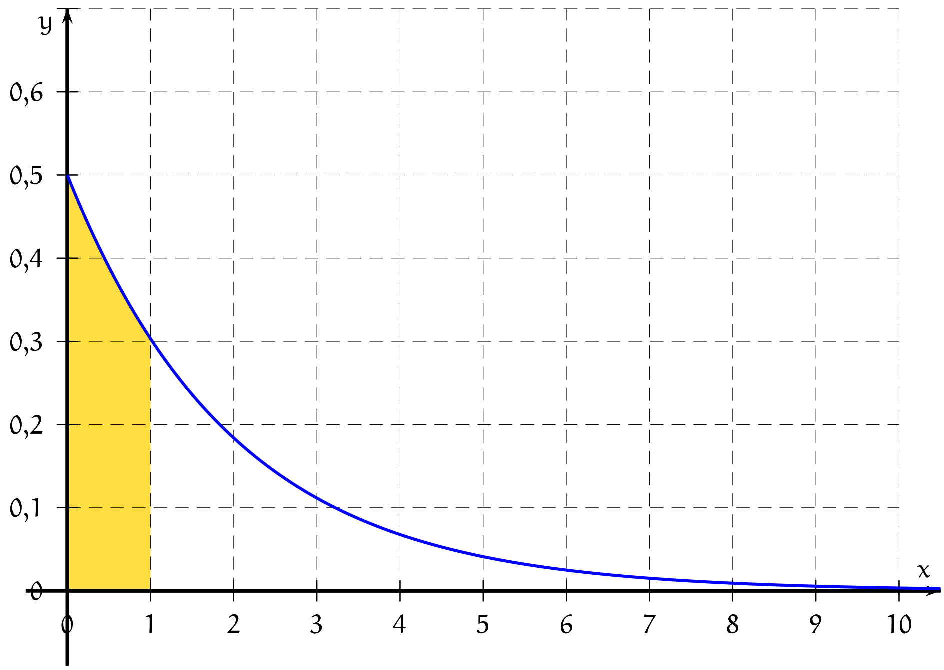
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right) = \frac{1}{\lambda}(0+0+1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ceci montre que

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}.}$$

Partie B

1) a) $P(X \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. La fonction densité représentée sur le graphique ci-dessous est la fonction $g\ :\ x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$. Donc, $P(X \leqslant 1)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré ci-dessous.



b) $g(0) = \lambda e^0 = \lambda$. λ est donc l'ordonnée du point de la courbe ci-dessus d'abscisse 0. Sur le graphique, on lit $\lambda = 0,5$.

2) a) Dire que $E(X) = 2$ signifie que en moyenne, la durée de vie d'un composant électronique est de 2 ans.

b) $\frac{1}{\lambda} = 2$ fournit $\lambda = \frac{1}{2}$ ou encore $\lambda = 0,5$.

c) Pour tout réel $a \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-0,5a}.$$

En particulier, $P(X \leqslant 2) = 1 - e^{-0,5\times 2} = 1 - e^{-1} = 0,63$ arrondi à $0,01$. Ceci signifie que la probabilité que le composant électronique fonctionne au plus deux ans est environ $0,63$.

d) La probabilité demandée est $P_{X \geqslant 1}(X \geqslant 3)$.

$$P_{X \geqslant 1}(X \geqslant 3) = \frac{1-\left(1-e^{-0,5\times 3}\right)}{1-(1-e^{-0,5\times 1})} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-0,5}} = e^{-1}.$$

Partie C

1) La probabilité demandée, c'est-à-dire la probabilité que les deux composants soient défaillants avant un an, est $P\left(D_1 \cap D_2\right)$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants,

$$P\left(D_1 \cap D_2\right) = P\left(D_1\right) \times P\left(D_2\right) = (0,39)^2 = 0,1521.$$

2) L'événement « le circuit B est défaillant avant un an » est l'événement contraire de l'événement « aucun des deux composants n'est défaillant avant un an » qui est l'événement $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants, on sait que les événements $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ sont indépendants. Donc

$$P\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right) = P\left(\overline{D_1}\right) \times P\left(\overline{D_2}\right) = (1-0,39)^2 = 0,61^2 = 0,3721.$$

La probabilité demandée est alors

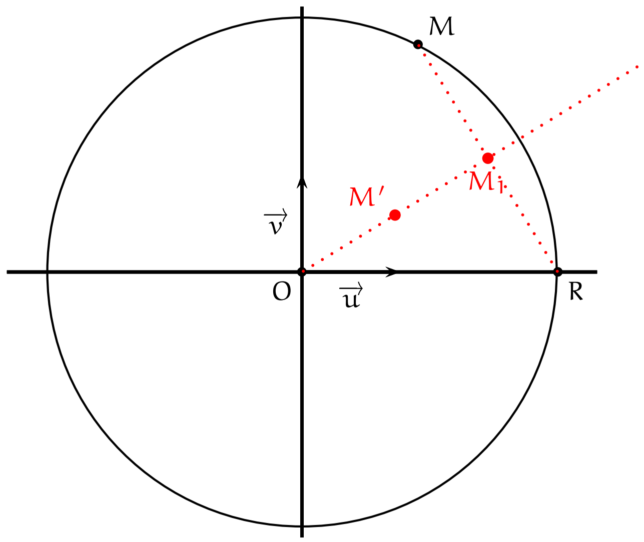
$$1 - P\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right) = 1 - 0,3721 = 0,6279.$$

EXERCICE 3

Partie A

1) Le point $|z_R| = |z_M| = |z|$ et $\arg(z_R) = 0\ [2\pi]$. Par suite, $x_R = |z| \times \cos(0) = |z|$ et $y_R = |z| \times \sin(0) = 0$. Le point R a pour coordonnées $(|z|, 0)$.

2) On construit d'abord M_1 le milieu du segment $[MR]$. M' est alors le milieu du segment $[OM_1]$.



Partie B

1) Soit z_0 un réel négatif. Alors, $|z_0| = -z_0$ puis $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} = 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $z_n = 0$.

- L'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $z_n = 0$. Alors, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4} = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $z_n = 0$.

En particulier, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\operatorname{dim} n{+}\infty z_n = 0$.

2) Soit z_0 un réel positif. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif.

- L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que z_n soit un réel positif. Alors $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$ est un réel positif.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif.

Puisque pour $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif, pour tout $n \geqslant 0$, on a $z_{n+1} = \dfrac{z_n + z_n}{4} = \dfrac{z_n}{2}$.

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $\dfrac{1}{2}$. On en déduit que

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ z_n = z_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on en déduit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\operatorname{dim} n{+}\infty z_n = 0$.

3) a) Il semble que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\operatorname{dim} n{+}\infty |z_n| = 0$.

b) Soit $n \geqslant 0$.

$$|z_{n+1}| = \frac{1}{4}\left|z_n + |z_n|\right| \leqslant \frac{1}{4}\left(|z_n| + \left||z_n|\right|\right) = \frac{1}{4}\left(|z_n| + |z_n|\right) = \frac{|z_n|}{2}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.

- Puisque $\dfrac{|z_0|}{2^0} = |z_0|$, l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$. Alors $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{|z_n|}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{|z_0|}{2^n} = \dfrac{|z_0|}{2^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $0 \leqslant |z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|z_0|}{2^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.

EXERCICE 4.

Partie A

- $p = 2$
- $u = 5$
- $k = 1$ puis $u = 0,5 \times 5 + 0,5(1-1) - 1,5 = 1$
- $k = 2$ puis $u = 0,5 \times 1 + 0,5(2-1) - 1,5 = -0,5$

L'algorithme affiche alors $-0,5$.

Partie B

1) Algorithme modifié.

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ Afficher u Fin de pour

2) On a $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ et $u_3 < u_4$. Puisque $u_3 < u_4$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

3) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} > u_n$.

- L'inégalité est vraie quand $n = 3$ d'après la question précédente.
- Soit $n \geqslant 3$, Supposons que $u_{n+1} > u_n$ et montrons que $u_{n+2} > u_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5 = 0,5u_{n+1} + 0,5n - 1 \\
&> 0,5u_n + 0,5n - 1 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 0,5u_n + 0,5n - 1,5 + 0,5 = u_{n+1} + 0,5 \\
&> u_{n+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} > u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante jusqu'au rang 3 puis strictement croissante.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 = 0,1\,(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n - 0,1 + 0,5 \\
&= 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n - 0,05n - 0,25 \\
&= 0,5\,(0,1u_n - 0,1n + 0,5) \\
&= 0,5v_n.
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$. D'autre part,

$$v_0 = 0,1u_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 0,1 \times 5 + 0,5 = 1.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = (0,5)^n.$$

5) Soit $n \geqslant 0$.

$$v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \Rightarrow 0,1u_n = v_n + 0,1n - 0,5 \Rightarrow \frac{u_n}{10} = (0,5)^n + \frac{n-5}{10} \Rightarrow u_n = 10 \times (0,5)^n + n - 5.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 10 \times (0,5)^n + n - 5.}$$

6) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times (0,5)^n = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-5) = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

