Session 2015

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe 1** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1) Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.

2) Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1) Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.

2) a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0, +\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.
Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.
Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
h_a	‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

b) Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

a) Justifier que, dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}, +\infty\right[$.

b) Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

4) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{1}{2e}$.

a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.

5) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

EXERCICE 2 (5 points)

(commun à tous les candidats)

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

1) Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).$$

2) En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1) Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

b) Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2) On suppose que $E(X) = 2$.

a) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

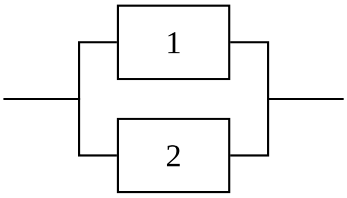
b) Calculer la valeur de λ.

c) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,01$ près. Interpréter ce résultat.

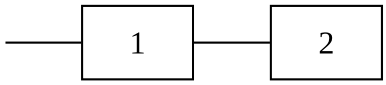
d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A



Circuit en série B

1) Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

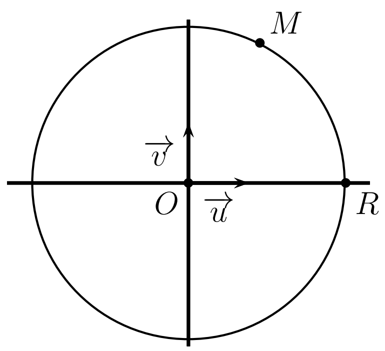
2) Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

EXERCICE 3 (4 points)

(commun à tous les candidats)

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[0, \overrightarrow{u})$.



1) Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.

2) Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z + |z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?

2) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

3) On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.

a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?

b) Démontrer cette conjecture, puis conclure.

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A.

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a, b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrée :	Demander a Demander b

Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a, b)$
	Tant que $c \neq 0$
	  Affecter à a le nombre b
	  Affecter à b la valeur c
	  Affecter à c le nombre $r(a, b)$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher b

1) Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

2) Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B.

A chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Etape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Etape 2 : A la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Etape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px + q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

Etape 4 : A l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1) Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.

a) Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.

b) Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple (u, v) qui convient.

c) Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$.

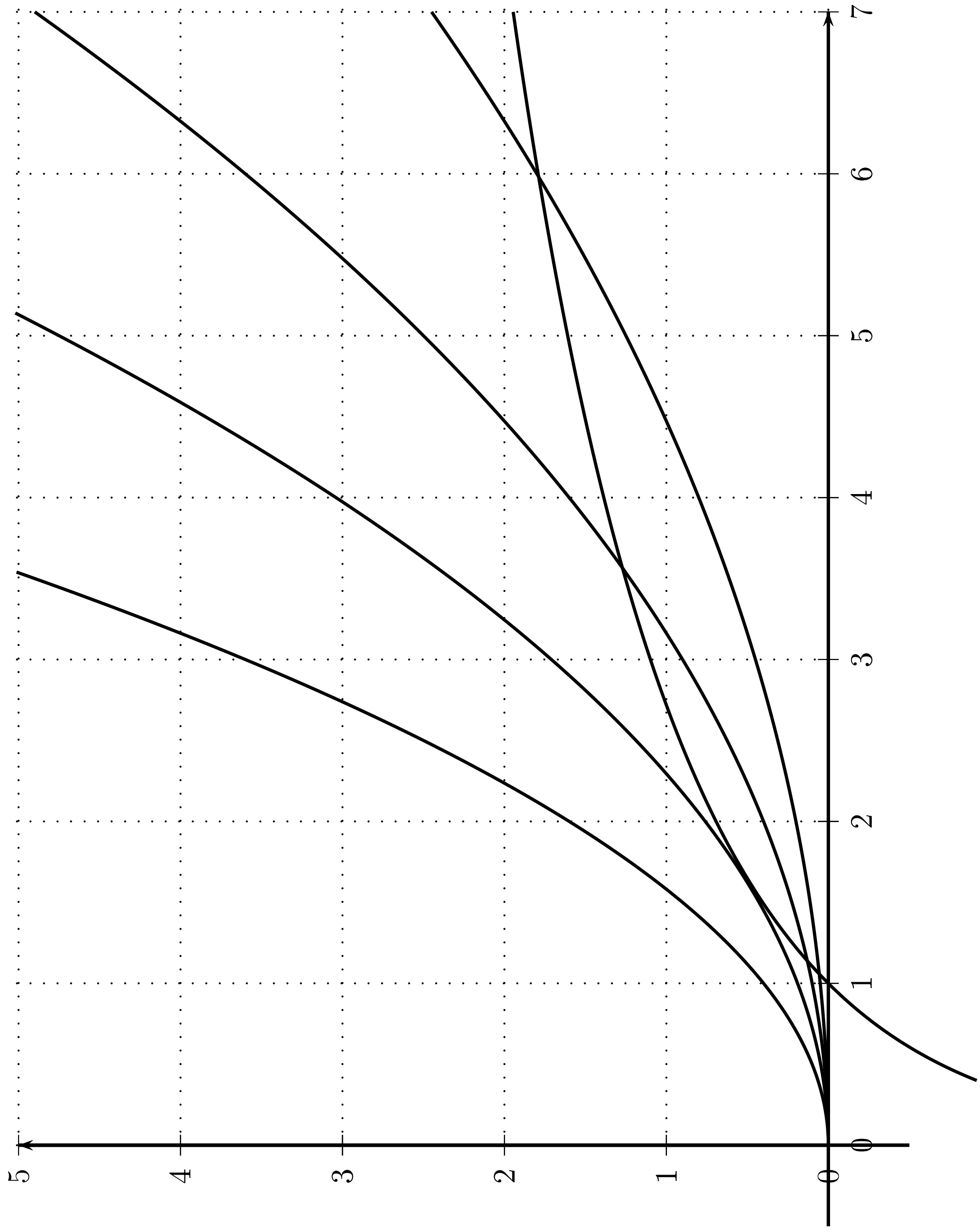
d) Décoder la lettre R.

2) Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D. Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

3) Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?

A RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1



A RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2