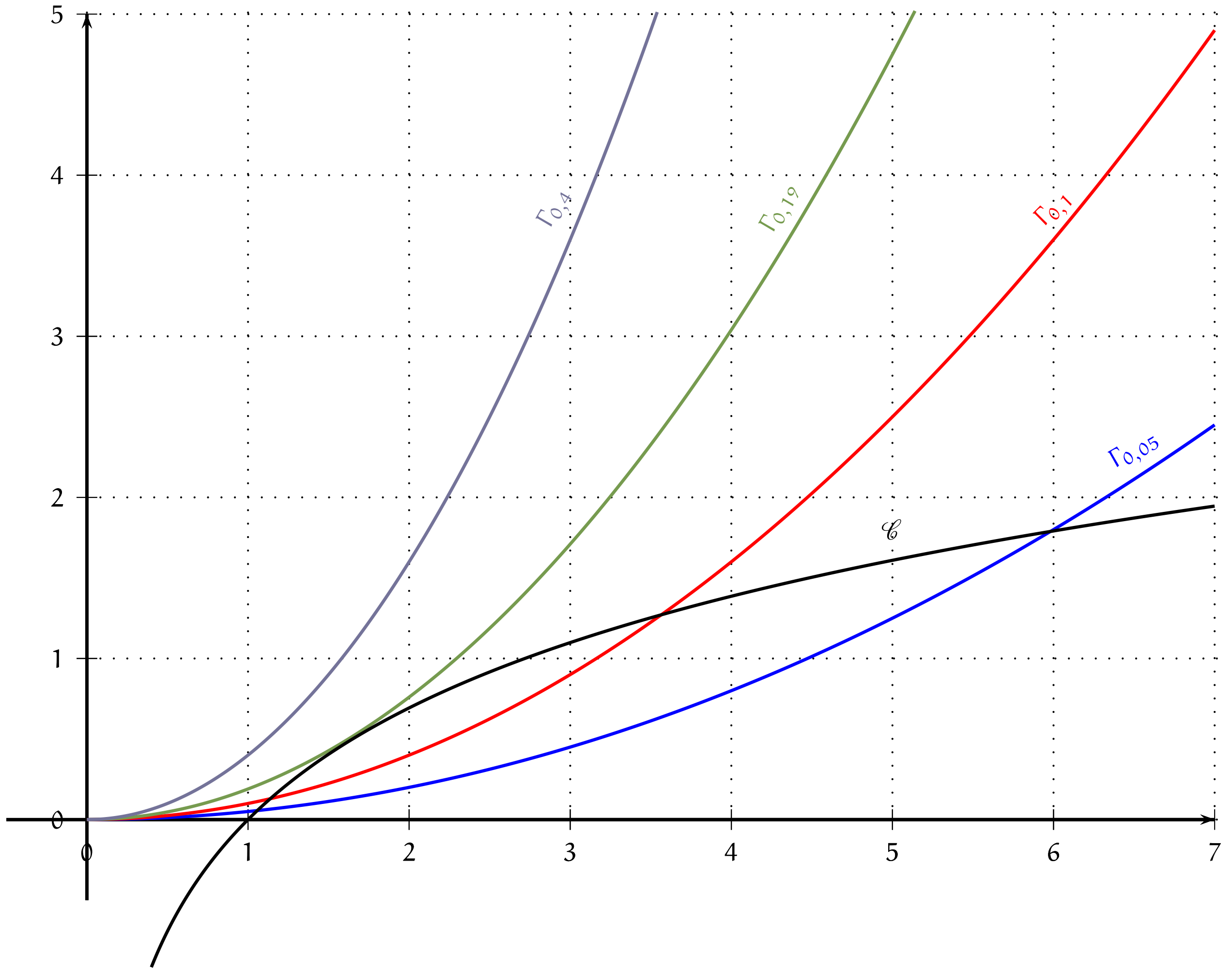
Antilles Guyane 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Graphes.



2) Il semble que si $a > 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a n'aient pas de point commun, si $a = 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a aient exactement un point commun et si $0 < a < 0,19$, $\mathscr{C}$ et Γ_a aient exactement deux points communs.

Partie B

1) Soient $x > 0$ puis M un point du plan d'abscisse x.

$$M \in \mathscr{C} \cap \Gamma_a \Leftrightarrow \ln(x) = ax^2 \Leftrightarrow \ln(x) - ax^2 = 0 \Leftrightarrow h_a(x) = 0.$$

Donc, les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a sont les solutions de l'équation $h_a(x) = 0$.

2) a) Pour tout réel x, $h'_a(x) = \dfrac{1}{x} - 2ax = \dfrac{1-2ax^2}{x}$. Sur $]0,+\infty[$, $h'_a(x)$ est du signe de $1-2ax^2$.

Pour $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 < \dfrac{1}{2a}$ (par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $[0,+\infty[$) puis $2ax^2 < 1$ et enfin $1-2ax^2 > 0$.

Pour $x > \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 > \dfrac{1}{2a}$ puis $2ax^2 > 1$ et enfin $1-2ax^2 < 0$.

Pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, on a $x^2 = \dfrac{1}{2a}$ puis $1-2ax^2 = 0$.

En résumé, la fonction h'_a est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right[$, strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty\right[$ et s'annule en $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Pour $x>0$,

$$h_a(x)=x\left(\frac{\ln(x)}{x}-ax\right).$$

Puisque $a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}ax=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$. En retranchant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}-ax\right)=-\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}h_a(x)=-\infty.}$$

3) a) La fonction $h_{0,1}$ est continue et strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$. De plus, $\lim\limits_{x\to0}h_{0,1}(x)=-\infty<0$ et $h_{0,1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right)=\dfrac{-1-\ln(0,2)}{2}=0,3\ldots>0$.

Donc, la fonction $h_{0,1}$ s'annule une fois et une seule sur $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$.

b) Puisque l'équation $h_a(x)=0$ admet exactement deux solutions, d'après la question 1), les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont exactement deux points d'intersection.

4) a) Le maximum de la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est

$$h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{\frac{1}{2(1/2e)}}\right)=h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2}\left(-1-\ln\left(\frac{2}{2e}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\ln(e)\right)=0.$$

b) D'après la question 2)a), la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est strictement croissante sur $\left]0,\sqrt{e}\right]$. Donc, pour $x\in\left]0,\sqrt{e}\right[$, $h_{\frac{1}{2e}}(x)<h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right)=0$.

De même, la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est strictement décroissante sur $\left[\sqrt{e},+\infty\right[$. Donc, pour $x\in\left]\sqrt{e},+\infty\right[$, $h_{\frac{1}{2e}}(x)<h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right)=0$.

En particulier, pour tout réel strictement positif x distinct de $\sqrt{e}$, $h_{\frac{1}{2e}}(x)\neq0$. D'autre part, $h_{\frac{1}{2e}}\left(\sqrt{e}\right)=0$. On en déduit que la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ s'annule une fois et une seule sur $]0,+\infty[$. D'après la question 1), les courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ ont un point d'intersection et un seul.

5) Si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}>0$, comme à la question 3), les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont au moins un point commun et si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}=0$, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a ont un point commun d'après la question 4). Enfin, si $\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}<0$, la fonction h_a a un maximuym strictement négatif. En particulier, la fonction h_a ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ ou encore les courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont pas de point d'intersection. En résumé,

$$\begin{aligned}\mathscr{C}\cap\Gamma_a=\varnothing&\Leftrightarrow\frac{-1-\ln(2a)}{2}<0\Leftrightarrow-1-\ln(2a)<0\Leftrightarrow1+\ln(2a)>0\\&\Leftrightarrow\ln(2a)>-1\Leftrightarrow2a>e^{-1}\\&\Leftrightarrow a>\frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit $\lambda > 0$. Pour tout réel $x > 0$,

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \left[-\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} + \left(0+\frac{1}{\lambda}\right)e^0$$
$$= -\frac{\lambda x+1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).$$

2) Puisque $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim\limits_{y\to-\infty} y e^y = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$. Donc,

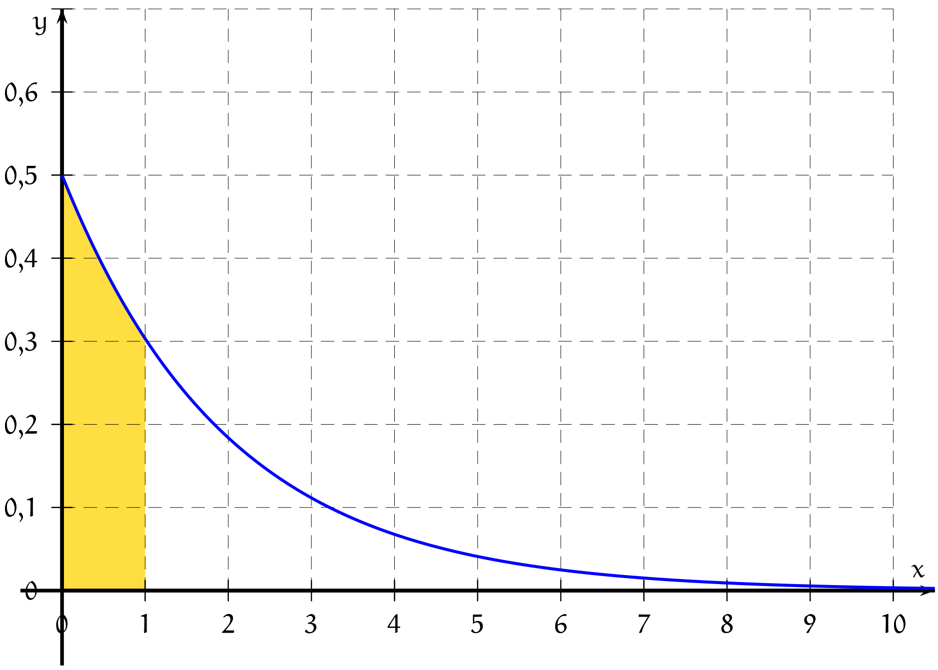
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right) = \frac{1}{\lambda}(0+0+1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ceci montre que

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}.}$$

Partie B

1) a) $P(X \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. La fonction densité représentée sur le graphique ci-dessous est la fonction $g : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$. Donc, $P(X \leqslant 1)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré ci-dessous.



b) $g(0) = \lambda e^0 = \lambda$. λ est donc l'ordonnée du point de la courbe ci-dessus d'abscisse 0. Sur le graphique, on lit $\lambda = 0,5$.

2) a) Dire que $E(X) = 2$ signifie que en moyenne, la durée de vie d'un composant électronique est de 2 ans.

b) $\frac{1}{\lambda} = 2$ fournit $\lambda = \frac{1}{2}$ ou encore $\lambda = 0,5$.

c) Pour tout réel $a \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-0,5a}.$$

En particulier, $P(X \leqslant 2) = 1 - e^{-0,5\times 2} = 1 - e^{-1} = 0,63$ arrondi à $0,01$. Ceci signifie que la probabilité que le composant électronique fonctionne au plus deux ans est environ $0,63$.

d) La probabilité demandée est $P_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3)$.

$$P_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3) = \frac{1-\left(1-e^{-0,5\times 3}\right)}{1-\left(1-e^{-0,5\times 1}\right)} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-0,5}} = e^{-1}.$$

Partie C

1) La probabilité demandée, c'est-à-dire la probabilité que les deux composants soient défaillants avant un an, est $P\left(D_1 \cap D_2\right)$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants,

$$P\left(D_1 \cap D_2\right) = P\left(D_1\right) \times P\left(D_2\right) = (0,39)^2 = 0,1521.$$

2) L'événement « le circuit B est défaillant avant un an » est l'événement contraire de l'événement « aucun des deux composants n'est défaillant avant un an » qui est l'événement $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants, on sait que les événements $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ sont indépendants. Donc

$$P\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right) = P\left(\overline{D_1}\right) \times P\left(\overline{D_2}\right) = (1-0,39)^2 = 0,61^2 = 0,3721.$$

La probabilité demandée est alors

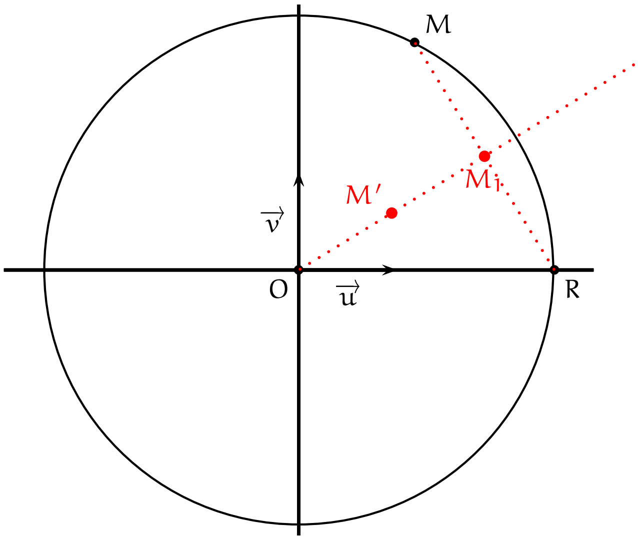
$$1 - P\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right) = 1 - 0,3721 = 0,6279.$$

EXERCICE 3

Partie A

1) Le point $|z_R| = |z_M| = |z|$ et $\arg(z_R) = 0\ [2\pi]$. Par suite, $x_R = |z| \times \cos(0) = |z|$ et $y_R = |z| \times \sin(0) = 0$. Le point R a pour coordonnées $(|z|, 0)$.

2) On construit d'abord M_1 le milieu du segment $[MR]$. M' est alors le milieu du segment $[OM_1]$.



Partie B

1) Soit z_0 un réel négatif. Alors, $|z_0| = -z_0$ puis $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} = 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $z_n = 0$.

- L'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $z_n = 0$. Alors, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4} = 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $z_n = 0$.

En particulier, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\dim n{+}\infty z_n = 0$.

2) Soit z_0 un réel positif. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif.

- L'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que z_n soit un réel positif. Alors $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$ est un réel positif.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif.

Puisque pour $n \geqslant 0$, z_n est un réel positif, pour tout $n \geqslant 0$, on a $z_{n+1} = \dfrac{z_n + z_n}{4} = \dfrac{z_n}{2}$.

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $\dfrac{1}{2}$. On en déduit que

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ z_n = z_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on en déduit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\dim n{+}\infty z_n = 0$.

3) a) Il semble que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\dim n{+}\infty\, |z_n| = 0$.

b) Soit $n \geqslant 0$.

$$|z_{n+1}| = \frac{1}{4}\,|z_n + |z_n|| \leqslant \frac{1}{4}\,(|z_n| + ||z_n||) = \frac{1}{4}\,(|z_n| + |z_n|) = \frac{|z_n|}{2}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.

- Puisque $\dfrac{|z_0|}{2^0} = |z_0|$, l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$. Alors $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{|z_n|}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{|z_0|}{2^n} = \dfrac{|z_0|}{2^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $0 \leqslant |z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|z_0|}{2^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.

EXERCICE 4.

Partie A

1)

- $a = 26$ et $b = 9$.
- Puisque $26 = 9 \times 2 + 8$ et donc $c = 8$.
- $a = 9$ et $b = 8$. Puis $c = 1$.
- $a = 8$ et $b = 1$. Puis $c = 0$.

L'algorithme affiche alors 1.

2) Algorithme modifié.

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrée :	Demander a Demander b
Traitement : Sortie :	Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à a le nombre b Affecter à b la valeur c Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que Si $b \neq 1$, afficher « les entiers a et b ne sont pas premiers entre eux » Sinon, afficher « les entiers a et b sont premiers entre eux »

Partie B

1) a) La lettre V correspond à $x = 21$.

$$9x + 2 = 9 \times 21 + 2 = 191 = 7 \times 26 + 9 \equiv 9\ [26].$$

avec $0 \leqslant 9 \leqslant 25$. Donc, $x' = 9$. 9 correspond à la lettre J et donc la lettre V est codée par la lettre J.

b) D'après la question 1) de la partie A, les entiers 9 et 26 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $9u + 26v = 1$.

Le couple $(u_0, v_0) = (3, -1)$ est un couple d'entiers relatifs vérfiant $9u_0 + 26v_0 = 1$.

c) Soient x et x' deux entiers naturels compris au sens large entre 0 et 25.
Si $x' \equiv 9x + 2\ [26]$ alors $3x' \equiv 27x + 6\ [26]$ puis $3x' \equiv x - 20\ [26]$ et donc $x \equiv 3x' + 20\ [26]$.
Si $x \equiv 3x' + 20\ [26]$ alors $9x \equiv 27x' + 180\ [26]$ puis $9x \equiv x' - 2\ [26]$ (car $180 + 2 = 182 = 7 \times 26$) et donc $x' \equiv 9x + 2\ [26]$.

On a montré que $x' \equiv 9x + 2\ [26]$ si et seulement si $x \equiv 3x' + 20\ [26]$.

d) La lettre R correspond à $x' = 17$. Puis $x \equiv 3 \times 17 + 20\ [26]$ ou encore $x \equiv 71\ [26]$ ou enfin $x \equiv 19\ [26]$ avec $0 \leqslant 19 \leqslant 25$. 19 correspond à la lettre T. Donc, la lettre R code la lettre T.

2) La lettre J correspond à 9 et la lettre D correspond à 3. Donc,

$$3 \equiv p \times 9 + 2\ [26].$$

On en déduit que $9p \equiv 1\ [26]$ puis que $3 \times 9p \equiv 3 \times 1\ [26]$ puis que $p \equiv 3\ [26]$ avec $0 \leqslant 3 \leqslant 25$. Donc, $p = 3$.

3) La lettre B correspond à $x = 1$. $x' = 13 + 2 = 15 \equiv 15\ [26]$ avec $0 \leqslant 15 \leqslant 26$. 15 correspond à la lettre P et donc B est codée par P.

La lettre B correspond à $x = 3$. $x' = 3 \times 13 + 2 = 41 \equiv 15\ [26]$. La lettre D est aussi codée par la lettre P.

En particulier, deux lettres distinctes sont codées par une même lettre. Le codage est donc mauvais.

