# Amérique du sud 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

**EXERCICE 1**

**Partie A**

**1)** $u(1) = u(4) = 0$.

**2)** La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^2} = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a$. On en déduit que

$$\boxed{a = 1.}$$

**3)** Pour tout réel $x > 0$, $u(x) = 1 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$. L'égalité $u(1) = 0$ fournit $1 + b + c = 0$ et l'égalité $u(4) = 0$ fournit $1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16} = 0$. Ensuite,

$$\left\{\begin{array}{l} 1+b+c=0 \\ 1+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{16}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b+c=-1 \\ 4b+c=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3b=-15\ ((\mathrm{II})-(\mathrm{I})) \\ 4b+c=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-5 \\ -20+c=-16 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-5 \\ c=4 \end{array}\right. .$$

Mais alors, pour tout réel $x > 0$,

$$u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } ]0,+\infty[,\ u(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2}.}$$

**Partie B**

**1)** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x - (5x\ln(x) + 4)\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 5x\ln(x) + 4 = 4 > 0$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

En multipliant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (5x\ln(x) + 4)\dfrac{1}{x} = +\infty$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0$, en retranchant, on obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty.}$$

**2)** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x\left(1 - 5\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right)$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 5\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right) = 1 - 5\times0 + 0 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

**3)** $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} = u(x).$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 5x + 4$. La partie A montre que le trinôme $x^2 - 5x + 4$ admet pour racines les deux nombres réels $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$. On sait que le trinôme $x^2 - 5x + 4$ est du signe du coefficient de $x^2$, à savoir 1, sur $]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$. En tenant compte de $f(1) = 1 - 5\ln(1) - 4 = -3$ et $f(4) = 4 - 5\ln(4) - \dfrac{4}{4} = 3 - 10\ln 2$, on en déduit le tableau de variations de $f$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $\|$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | $3-10\ln 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Partie C**

**1)** La fonction $u$ est continue et négative sur $[1,4]$. Donc,

$$\mathscr{A} = \int_1^4 -u(x)\ dx = [-f(x)]_1^4 = -f(4)+f(1) = -3+10\ln(2)-3 = 10\ln 2 - 6.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 10\ln(2)-6 = 0,9 \text{ arrondi à } 10^{-1}.}$$

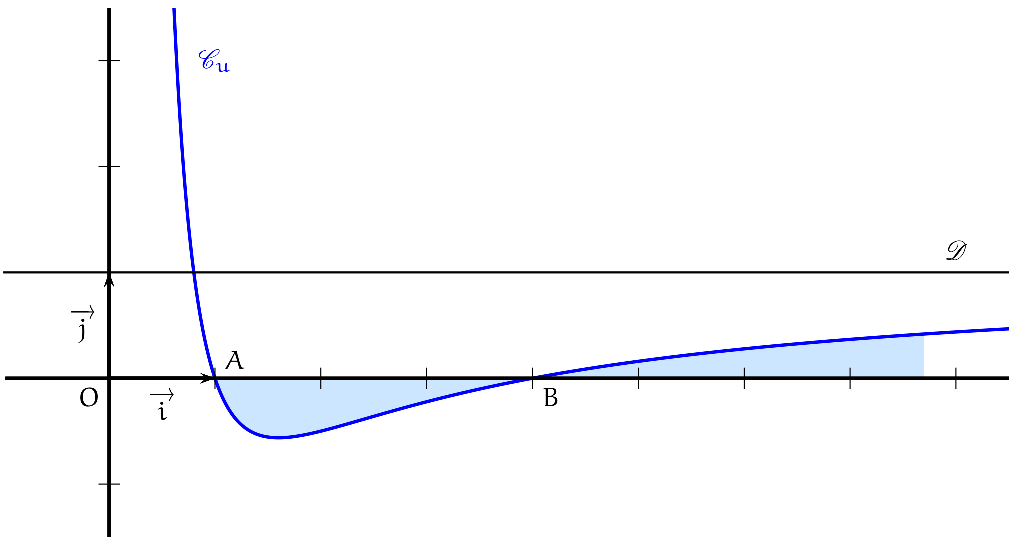
**2)** Soit $\lambda$ un réel supérieur ou égal à 4. La fonction $u$ est continue et positive sur $[4,\lambda]$. Donc

$$\mathscr{A}_\lambda = \int_4^\lambda u(x)\ dx = [f(x)]_4^\lambda = f(\lambda)-f(4).$$

Par suite,

$$\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A} \Leftrightarrow f(\lambda)-f(4) = f(1)-f(4) \Leftrightarrow f(\lambda) = -3.$$

D'après la partie B, la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $[4,+\infty[$. De plus, $f(4) = -3,9\ldots < -3$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = +\infty > -3$. On sait alors que l'équation $f(\lambda) = -3$ admet une solution et une seulme dans $[4,+\infty[$ ou encore il existe un réel $\lambda$ de $[4,+\infty[$ et un seul tel que $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$.



**EXERCICE 2**

**1)** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(1, 0, -2)$. D'autre part, la droite $\Delta$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(4, -1, 2)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Donc les droites $\Delta$ et $(AC)$ sont orthogonales. L'affirmation 1 est vraie.

**2)** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4, 3, -7)$. S'il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $3 = 0 \times k$ (à partir de la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points $A$, $B$ et $C$ déterminent un plan.

- $2x_A + 5y_A + z_A - 5 = 2 \times 3 + 5 \times (-1) + 4 - 5 = 6 - 5 + 4 - 5 = 0.$
- $2x_B + 5y_B + z_B - 5 = 2 \times (-1) + 5 \times 2 + (-3) - 5 = -2 + 10 - 3 - 5 = 0.$
- $2x_C + 5y_C + z_C - 5 = 2 \times 4 + 5 \times (-1) + 2 - 5 = 8 - 5 + 2 - 5 = 0.$

Les trois points $A$, $B$ et $C$ appartiennent au plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$ et donc le plan $(ABC)$ est le plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$. L'affirmation 2 est vraie.

**3)** Par exemple, si $s = s' = 0$, le point $M_0$ correspondant est $(1, 1, 1)$ et ce point n'appartient pas à $\mathscr{P}$ car $2x_M - 3y_M + 2z_M - 7 = 2 - 3 + 2 - 7 = -6 \neq 0$. L'affirmation 3 est fausse.

**4)** Le plan $\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -3, 2)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 4 \times 2 + (-1) \times (-3) + 2 \times 2 = 15 \neq 0.$$

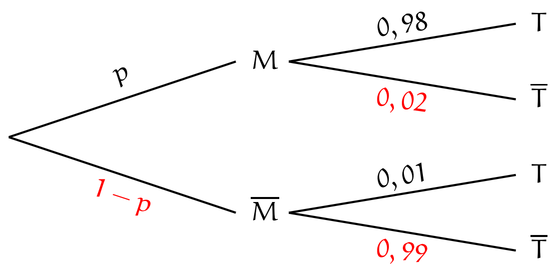
Donc la droite $\Delta$ est sécante au plan $\mathscr{P}$ puis la droite $\Delta$ est sécante à tout plan parallèle à $\mathscr{P}$. On en déduit qu'aucun plan parallèle à $\mathscr{P}$ ne contient la droite $\Delta$. L'affirmation 4 est fausse.

**EXERCICE 3**

**Partie A**

**1) a)** L'énoncé fournit $P_M(T) = 0,98$, $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P(M) = p$. Représentons la situation par un arbre de probabilité.




**b)** $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,98p$. $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,01(1-p) = 0,01 - 0,01p$. Enfin, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,98p + 0,01 - 0,01p = 0,97p + 0,01.$$

**2) a)**

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,98p}{0,97p + 0,01} = \frac{0,98p \times 100}{(0,97p + 0,01) \times 100} = \frac{98p}{97p + 1}.$$

**b)** La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$ et pour tout réel $p$ de $[0,1]$,

$$f'(p) = \frac{98(97p+1) - 98p \times 97}{(97p+1)^2} = \frac{98}{(97p+1)^2}.$$

La fonction $f'$ est strictement positive sur $[0,1]$ et donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0,1]$.

**3)** Le test est fiable quand $P_T(M) \geqslant 0,95$ ou encore $f(p) \geqslant 0,95$.

$$f(p) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow \frac{98p}{97p+1} \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 98p \geqslant 92,15p + 0,95 \Leftrightarrow 5,85p \geqslant 0,95$$
$$\Leftrightarrow p \geqslant \frac{0,95}{5,85} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{95}{585} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{19}{117}.$$

**Partie B**

**1) a)** La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 1000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne est atteinte par le virus » avec une probabilité $p = 0,15$ et « la personne n'est pas atteinte par le virus » avec une probabilité $1 - p = 0,85$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,15$. On sait alors que pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant 1000$,

$$P(X = k) = \binom{1000}{k}(0,15)^k(0,85)^{1000-k}.$$

**b)** On note tout d'abord que $n \geqslant 30$ puis $np = 150$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 850$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,15 - 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times (1-0,15)}{1000}}, 0,15 + 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times (1-0,15)}{1000}}\right]$$
$$= [0,127; 0,173].$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée dans l'échantillon est $f = \dfrac{197}{1000} = 0,197$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc on peut affirmer que le pourcentage de 15% publié par l'institut de veille sanitaire est faux au risque de se tromper de 5%.

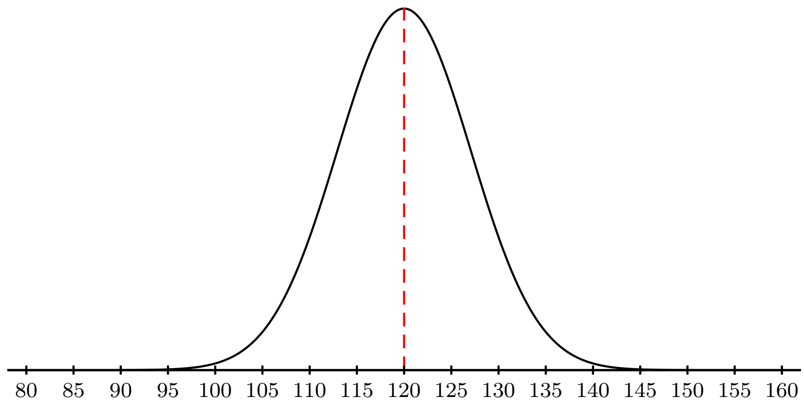
**2)** Ici, $n = 1000$ et $f = 0,197$. On est dans les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance car $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,197 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, 0,197 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,165; 0,229]$$

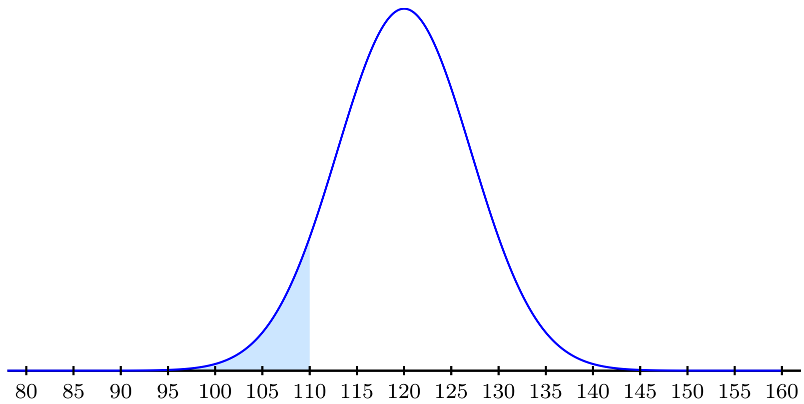
en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La probabilité $p$ appartient à l'intervalle $[0,165; 0,229]$ avec un niveau de confiance de 95%.

**Partie C**

**1) a)** Il semble que $\mu = 120$.




**b)**




**2) a)** On sait que $T'$ suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

**b)**

$$T < 110 \Leftrightarrow T - \mu < 110 - \mu \Leftrightarrow \frac{T-\mu}{10} < \frac{110-\mu}{10} \Leftrightarrow$$

et donc $P(T < 110) = P\left(T' < \dfrac{110-\mu}{10}\right) = P\left(T' \leqslant \dfrac{110-\mu}{10}\right)$. La calculatrice fournit

$$P\left(T' \leqslant \frac{110-\mu}{10}\right) = 0,18 \Leftrightarrow \frac{110-\mu}{10} = -0,91\ldots$$

puis $\mu = 110 + 10 \times 0,91\ldots = 119,1\ldots$ à l'unité près par excès. Ceci valide la conjecture de la question 1)a).

**EXERCICE 4.**

**Partie A**

**1)** Pour tout entier naturel $n$, $u_n + v_n = u_0 + v_0 = 120$.

**2)** Soit $n$ un entier naturel. La population en zone rurale l'année $2010 + n + 1$, à savoir $u_{n+1}$ est obtenu en retirant 10% de la même population l'année $2010 + n$ (10% qui émigrent vers la ville) et en ajoutant 5% de la population en zone urbaine l'année $2010 + n$ ou encore

$$u_{n+1} = u_n - 0,1u_n + 0,05v_n = 0,9u_n + 0,05v_n.$$

Dans la case B3, il faut donc écrire : =0,9*B2+0,05*C2

D'autre part,

$$v_{n+1} = 120 - u_{n+1}$$

et donc, dans la case C3, il faut écrire : =120-B3

**3)** Il semble que la population en zone rurale décroisse pour se stabiliser à long terme autour de 40 millions de personnes et qu'inversement la population en zone urbaine croisse pour se stabiliser à long terme autour de 80 millions de personnes.

**Partie B**

**Remarque.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$.

**1) a)** Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- $u_1 = 0,85u_0 + 6 = 0,85 \times 90 + 6 = 82,5$. Donc, $u_1 \leqslant u_0$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_{n+1} \leqslant u_n$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 0,85u_{n+1} + 6 \\ &\leqslant 0,85u_{n+1} + 6 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

**b)** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**2) a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34 = 0,85(u_n - 40) = 0,85w_n.$$

Donc, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,85$.

**b)** D'autre part, $w_0 = u_0 - 40 = 50$. On en déduit que pour tout entier naturel $n$,

$$w_n = w_0 \times q^n = 50 \times (0,85)^n$$

puis que $u_n = 40 + w_n = 40 + 50 \times (0,85)^n$.

**c)** Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 120 - u_n = 80 - 50 \times (0,85)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 40 + 50 \times (0,85)^n \text{ et } v_n = 80 - 50 \times (0,85)^n.}$$

**3)** Puisque $-1 < 0,85 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,85)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 80$. Ceci valide les conjectures émises dans la partie A.

**4) a)** L'algorithme calcule les valeurs successives de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en testant à chaque étape si $u_n \leqslant v_n$.

L'algorithme s'arrête à la première valeur de $n$ pour laquelle $u_n < v_n$ et l'affiche. Cet algorithme affiche donc le numéro de la première année pour laquelle le nombre de personnes habitant en zone rurale est strictement inférieur au nombre de personnes habitant en zone urbaine.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
u_n < v_n &\Leftrightarrow 40 + 50 \times (0,85)^n < 80 - 50 \times (0,85)^n \Leftrightarrow 100 \times (0,85)^n < 40 \\
&\Leftrightarrow (0,85)^n < 0,4 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,85)^n\right) < \ln(0,4) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur } ]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,85) < \ln(0,4) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,85)} \text{ (car } \ln(0,85) < 0) \\
&\Leftrightarrow n > 5,6\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 6.
\end{aligned}
$$

L'algorithme affiche la valeur 6 ou encore en 2016, le nombre de personnes habitant en zone rurale devient strictement inférieur au nombre de personnes habitant en zone urbaine pour la première fois.