France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) $f(x_A) = 0 + 1 + a \times 0 = 1 = y_A$. Donc, la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.

b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{0-1} = -2.$$

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 + 0 + a\left(1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x) \times e^{-x^2}\right) = 1 + a\left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2} = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

d) Puisque la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est -2 d'après la question b). Ce coefficient directeur est aussi $f'(0)$ avec $f'(0) = 1 - a \times (-1) \times e^0 = 1 + a$ puis

$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow 1 + a = -2 \Leftrightarrow a = -3.$$

$$\boxed{a = -3.}$$

2) a) Soit $x \in]-1, 0]$. $e^{-x^2} > 0$ et $-3x \geqslant 0$. Donc $-3xe^{-x^2} \geqslant 0$. D'autre part, $x > -1$ et donc $x + 1 > 0$. En additionnant, on obtient $f(x) > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]-1\ ;\ 0],\ f(x) > 0.}$$

b) Soit $x \in]-\infty, -1]$. Alors $x \leqslant -1$ puis $x^2 \geqslant 1$ et donc $2x^2 - 1 \geqslant 2 \times 1 - 1$ ou encore $2x^2 - 1 \geqslant 1$. En particulier, $2x^2 - 1 \geqslant 0$. Comme d'autre part $3e^{-x^2} \geqslant 0$, on en déduit que $3\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2} \geqslant 0$ puis que $f'(x) \geqslant 1$. En particulier, $f'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]-\infty\ ;\ -1],\ f'(x) > 0.}$$

c) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on sait que pour tout réel k de l'intervalle $\left[f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1)\right]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$.

Puisque $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}e^{-9/4} = -0,02\ldots < 0$ et que $f(-1) = 3e^{-1} > 0$, le réel 0 appartient à l'intervalle $\left[f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1)\right]$. Ceci montre qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Ensuite, $f\left(-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}\right) = 0,01\ldots > 0$. Ainsi, $f\left(-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}\right) > f(c)$ et les deux nombres c et $-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$ sont dans $]-\infty, -1]$.

Puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$, on en déduit que $c < -\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$.

3) a) La fonction f est croissante sur $[c, -1]$ et $f(c) = 0$. Donc, la fonction f est positive sur l'intervalle $[c, -1]$. D'autre part, la fonction f est positive sur l'intervalle $[-1, 0]$ d'après la question 2) a) et finalement la fonction f est positive sur l'intervalle $[c, 0]$.

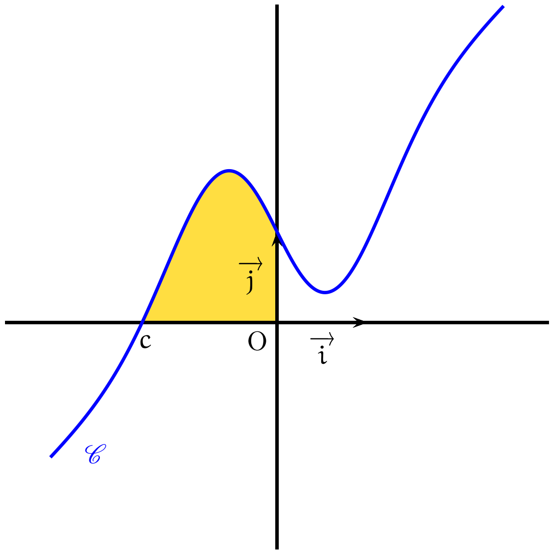
Ainsi, la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[c, 0]$ et donc $\mathscr{A} = \int_c^0 f(x)\,dx$.

b)

$$I = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \left(x + 1 + \frac{3}{2}(-2x)e^{-x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}e^{-x^2}\right]_{-\frac{3}{2}}^{0}$$

$$= \left(\frac{0^2}{2} + 0 + \frac{3}{2}e^0\right) - \left(\frac{(-3/2)^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-(-3/2)^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}} = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) a) L'énoncé dit que $E(X) = 10$ et donc $\dfrac{1}{\lambda} = 10$ puis $\lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

b) La probabilité demandée est $p(10 \leqslant X \leqslant 20)$. On sait que pour tout réel t,

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda x}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Par suite,

$$p(10 \leqslant X \leqslant 20) = p(X \leqslant 20) - p(X \leqslant 10) = \left(1 - e^{-0,1\times 20}\right) - \left(1 - e^{-0,1\times 10}\right) = e^{-1} - e^{-2}.$$

La calculatrice donne

$$\boxed{p(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-1} - e^{-2} = 0,2325 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15)$.

$$p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = \frac{p((X \geqslant 10) \cap (X \geqslant 15))}{p(X \geqslant 10)} = \frac{p(X \geqslant 15)}{p(X \geqslant 10)} = \frac{1 - p(X \leqslant 15)}{1 - p(X \leqslant 10)} = \frac{e^{-0,1\times 15}}{e^{-0,1\times 10}} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-1}} = e^{-1,5+1} = e^{-0,5}.$$

La calculatrice donne

$$\boxed{p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

2) a) L'énoncé dit que les paramètres de la loi Y sont n et $p = 0,8$. On sait alors que $E(Y) = np = 0,8n$ et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}$.

$$\boxed{E(Y) = 0,8n \text{ et } \sigma(Y) = \sqrt{0,16n}.}$$

b) La calculatrice fournit $p_1 = p(Z \leqslant 71) = 0,9575$ arrondi à 10^{-4}.

c) Puisque le restaurant a une capacité d'accueil de 70 places, la probabilité demandée est $p(Y > 70)$.
Or $p(Y > 70) = 1 - p(Y \leqslant 70)$ avec $p(Y \leqslant 70) = 0,96$ à 10^{-2} près. Donc

$$p(Y > 70) = 0,04 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Le restaurant a environ 4 chances sur 100 de ne pas pouvoir accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

1) a) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} = u_n - \dfrac{20}{100} \times u_n = 0,8u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 0,8^n.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
u_n < \frac{1}{100} \times u_0 &\Leftrightarrow 10 \times 0,8^n < 0,01 \times 10 \Leftrightarrow 0,8^n < 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(0,8^n\right) < \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,8) < \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\
&\Leftrightarrow n > 20,6\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

La quantité de médicament restant dans le sang deviendra inférieure à 1 % de la quantité initiale au bout de 21 minutes.

2) a) Tableau de valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b) En 15 minutes, il a été injecté 10 ml de médicament puis 4 ml à la minute n° 4 puis 4 ml à la minute n° 7 puis 4 ml à la minute n° 10 et encore 4 ml à la minute n° 13. Au total, il a été injecté $10+4+4+4+4 = 26$ ml de médicament.

c) Algorithme modifié.

Variables :	n est un entier naturel v est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10
Traitement	Pour n allant de 1 à 30 Affecter à v la valeur $0,8 \times v$ Si $v \leqslant 6$ alors affecter à v la valeur $v + 2$ Afficher v Fin de boucle

3) a) Soit n un entier naturel. w_{n+1} est obtenu en enlevant à w_n 20 % de sa valeur puis en ajoutant 1 ml de médicament. Donc

$$w_{n+1} = w_n - 0,2w_n + 1 = 0,8w_n + 1.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8w_n + 1 - 5 = 0,8w_n - 4 = 0,8\left(w_n - \frac{4}{0,8}\right) = 0,8\left(w_n - 5\right) = 0,8z_n.$$

De plus, $z_0 = w_0 - 5 = 10 - 5 = 5$. On a montré que la suite (z_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,8$ et le premier terme $z_0 = 5$.

c) On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$w_n = 5 + z_n = 5 + 5 \times 0,8^n.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ w_n = 5 + 5 \times 0,8^n.}$$

d) Puisque $-1 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 5 + 5 \times 0 = 5$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = 5.}$$

Ceci signifie qu'au bout d'un long moment, la quantité de médicament dans le sang sera à peu près constante, égale à environ 5 ml.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 4

1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(0, 2\sqrt{3}, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\left(-1, \sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et D définissent un unique plan.

Soit (P) le plan d'équation $4x + z\sqrt{2} = 4$.

- $4x_A + z_A\sqrt{2} = 4 + 0 = 4$. Donc le point A appartient à (P).
- $4x_B + z_B\sqrt{2} = 4 + 0 = 4$. Donc le point B appartient à (P).
- $4x_D + z_D\sqrt{2} = 0 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$. Donc le point D appartient à (P).

Puisque les points A, B et D définissent un unique plan, le plan (P) est le plan (ABD) ou encore le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.

2) a) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}\left(1, 0, \sqrt{2}\right)$. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\left(2, 0, 2\sqrt{2}\right)$. On note que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{u}$ et donc que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Par suite, la droite $\mathscr{D}$ et la droite (CD) sont parallèles.

Enfin, quand $t = 0$, on obtient le point O. Le point O est donc un point de la droite $\mathscr{D}$.

On a montré que $\mathscr{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

b) Soit $M\left(t, 0, t\sqrt{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$.

$$M \in (ABD) \Leftrightarrow 4 \times t + \sqrt{2} \times t\sqrt{2} = 4 \Leftrightarrow 6t = 4 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Quand $t = \frac{2}{3}$, on obtient les coordonnées du point G à savoir $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

3) a) Les coordonnées du point L sont $\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2}\right)$ ou encore $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2} - 1, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}, 0\right)$ ou encore $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\left(-3, \sqrt{3}, 0\right)$.

$$\overrightarrow{BL}.\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2} \times (-3) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{3} + 0 \times 0 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0.$$

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ou encore la droite (BL) est orthogonale à la droite (AC).
D'autre le vecteur $\overrightarrow{BO}$ a pour coordonnées $\left(-1, -\sqrt{3}, 0\right)$. Donc $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BO}$. On en déduit que les points O, B et L sont alignés ou encore que le point O appartient à la droite (BL).

On a montré que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

b)
- $AB = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}\right)\right)^2 + (0-0)^2} = 2\sqrt{3}$.
- $AC = \sqrt{(-2-1)^2 + \left(0 - \left(-\sqrt{3}\right)\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
- $BC = \sqrt{(-2-1)^2 + \left(0 - \sqrt{3}\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Ainsi, $AB = AC = BC$ et donc le triangle ABC est équilatéral.

Puisque le triangle ABC est équilatéral, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi le centre de gravité de ce triangle. Le point L est le milieu du segment [AC] et donc la droite (BL) est la médiane issue de B du triangle ABC. On a vu à la question a) que $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BL}$.
On sait alors que le centre de gravité du triangle ABC est le point O.

On a montré que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point O.

4)
- $AD = \sqrt{(0-1)^2 + \left(0 - \left(-\sqrt{3}\right)\right)^2 + \left(2\sqrt{2} - 0\right)^2} = \sqrt{1+3+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
- $BD = \sqrt{(0-1)^2 + \left(0 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2} - 0\right)^2} = \sqrt{1+3+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
- $CD = \sqrt{(0-(-2))^2 + (0-0)^2 + \left(2\sqrt{2} - 0\right)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Finalement, $AB = AC = AD = BD = CD = CD$ et on a montré que le tétraèdre ABCD est régulier.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.