France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) $f(x_A) = 0 + 1 + a \times 0 = 1 = y_A$. Donc, la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.

b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{0-1} = -2.$$

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 + 0 + a\left(1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x) \times e^{-x^2}\right) = 1 + a\left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2} = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

d) Puisque la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est -2 d'après la question b). Ce coefficient directeur est aussi $f'(0)$ avec $f'(0) = 1 - a \times (-1) \times e^0 = 1 + a$ puis

$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow 1 + a = -2 \Leftrightarrow a = -3.$$

$$\boxed{a = -3.}$$

2) a) Soit $x \in]-1, 0]$. $e^{-x^2} > 0$ et $-3x \geqslant 0$. Donc $-3xe^{-x^2} \geqslant 0$. D'autre part, $x > -1$ et donc $x + 1 > 0$. En additionnant, on obtient $f(x) > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]-1\ ;\ 0],\ f(x) > 0.}$$

b) Soit $x \in]-\infty, -1]$. Alors $x \leqslant -1$ puis $x^2 \geqslant 1$ et donc $2x^2 - 1 \geqslant 2 \times 1 - 1$ ou encore $2x^2 - 1 \geqslant 1$. En particulier, $2x^2 - 1 \geqslant 0$. Comme d'autre part $3e^{-x^2} \geqslant 0$, on en déduit que $3\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2} \geqslant 0$ puis que $f'(x) \geqslant 1$. En particulier, $f'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]-\infty\ ;\ -1],\ f'(x) > 0.}$$

c) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on sait que pour tout réel k de l'intervalle $\left[f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1)\right]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$.

Puisque $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}e^{-9/4} = -0,02\ldots < 0$ et que $f(-1) = 3e^{-1} > 0$, le réel 0 appartient à l'intervalle $\left[f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1)\right]$. Ceci montre qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Ensuite, $f\left(-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}\right) = 0,01\ldots > 0$. Ainsi, $f\left(-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}\right) > f(c)$ et les deux nombres c et $-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$ sont dans $]-\infty, -1]$.

Puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$, on en déduit que $c < -\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$.

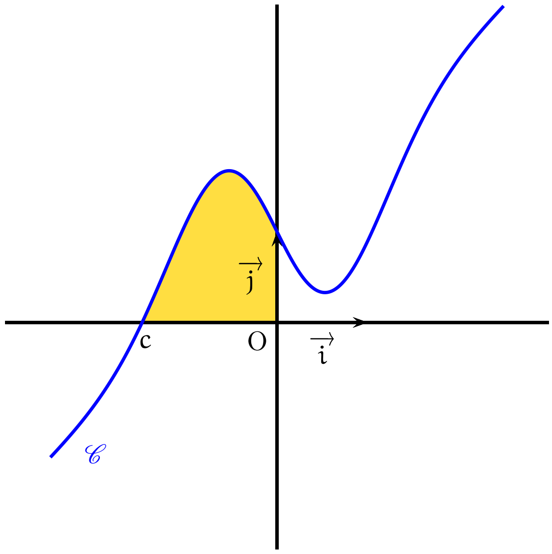
3) a) La fonction f est croissante sur $[c, -1]$ et $f(c) = 0$. Donc, la fonction f est positive sur l'intervalle $[c, -1]$. D'autre part, la fonction f est positive sur l'intervalle $[-1, 0]$ d'après la question 2) a) et finalement la fonction f est positive sur l'intervalle $[c, 0]$.

Ainsi, la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[c, 0]$ et donc $\mathscr{A} = \int_c^0 f(x)\,dx$.

b)

$$I = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \left(x + 1 + \frac{3}{2}(-2x)e^{-x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}e^{-x^2}\right]_{-\frac{3}{2}}^{0}$$
$$= \left(\frac{0^2}{2} + 0 + \frac{3}{2}e^0\right) - \left(\frac{(-3/2)^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-(-3/2)^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}} = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) a) L'énoncé dit que $E(X) = 10$ et donc $\dfrac{1}{\lambda} = 10$ puis $\lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

b) La probabilité demandée est $p(10 \leqslant X \leqslant 20)$. On sait que pour tout réel t,

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda x}\right) - \left(-e^{0}\right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Par suite,

$$p(10 \leqslant X \leqslant 20) = p(X \leqslant 20) - p(X \leqslant 10) = \left(1 - e^{-0,1\times 20}\right) - \left(1 - e^{-0,1\times 10}\right) = e^{-1} - e^{-2}.$$

La calculatrice donne

$$\boxed{p(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-1} - e^{-2} = 0,2325 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15)$.

$$p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = \frac{p((X \geqslant 10) \cap (X \geqslant 15))}{p(X \geqslant 10)} = \frac{p(X \geqslant 15)}{p(X \geqslant 10)} = \frac{1 - p(X \leqslant 15)}{1 - p(X \leqslant 10)} = \frac{e^{-0,1\times 15}}{e^{-0,1\times 10}} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-1}} = e^{-1,5+1} = e^{-0,5}.$$

La calculatrice donne

$$\boxed{p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

2) a) L'énoncé dit que les paramètres de la loi Y sont n et $p = 0,8$. On sait alors que $E(Y) = np = 0,8n$ et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}$.

$$\boxed{E(Y) = 0,8n \text{ et } \sigma(Y) = \sqrt{0,16n}.}$$

b) La calculatrice fournit $p_1 = p(Z \leqslant 71) = 0,9575$ arrondi à 10^{-4}.

c) Puisque le restaurant a une capacité d'accueil de 70 places, la probabilité demandée est $p(Y > 70)$.
Or $p(Y > 70) = 1 - p(Y \leqslant 70)$ avec $p(Y \leqslant 70) = 0,96$ à 10^{-2} près. Donc

$$p(Y > 70) = 0,04 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Le restaurant a environ 4 chances sur 100 de ne pas pouvoir accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

1) a) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} = u_n - \frac{20}{100} \times u_n = 0,8u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 0,8^n.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
u_n < \frac{1}{100} \times u_0 &\Leftrightarrow 10 \times 0,8^n < 0,01 \times 10 \Leftrightarrow 0,8^n < 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(0,8^n\right) < \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln(0,8) < \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\
&\Leftrightarrow n > 20,6\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

La quantité de médicament restant dans le sang deviendra inférieure à 1 % de la quantité initiale au bout de 21 minutes.

2) a) Tableau de valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b) En 15 minutes, il a été injecté 10 ml de médicament puis 4 ml à la minute n° 4 puis 4 ml à la minute n° 7 puis 4 ml à la minute n° 10 et encore 4 ml à la minute n° 13. Au total, il a été injecté $10+4+4+4+4 = 26$ ml de médicament.

c) Algorithme modifié.

Variables :	n est un entier naturel v est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10
Traitement	Pour n allant de 1 à 30 Affecter à v la valeur $0,8 \times v$ Si $v \leqslant 6$ alors affecter à v la valeur $v + 2$ Afficher v Fin de boucle

3) a) Soit n un entier naturel. w_{n+1} est obtenu en enlevant à w_n 20 % de sa valeur puis en ajoutant 1 ml de médicament. Donc

$$w_{n+1} = w_n - 0,2w_n + 1 = 0,8w_n + 1.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8w_n + 1 - 5 = 0,8w_n - 4 = 0,8\left(w_n - \frac{4}{0,8}\right) = 0,8\left(w_n - 5\right) = 0,8z_n.$$

De plus, $z_0 = w_0 - 5 = 10 - 5 = 5$. On a montré que la suite (z_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,8$ et le premier terme $z_0 = 5$.

c) On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$w_n = 5 + z_n = 5 + 5 \times 0,8^n.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ w_n = 5 + 5 \times 0,8^n.}$$

d) Puisque $-1 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 5 + 5 \times 0 = 5$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = 5.}$$

Ceci signifie qu'au bout d'un long moment, la quantité de médicament dans le sang sera à peu près constante, égale à environ 5 ml.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 4

1) a) $a_1 = a_0 - 0,2a_0 + 0,1b_0 = 0,8a_0 + 0,1b_0 = (0,8+0,1)\times 0,5 = 0,9\times 0,5 = 0,45$ et $b_1 = b_0 - 0,1b_0 + 0,2a_0 = 0,9b_0 + 0,2a_0 = (0,9+0,2)\times 0,5 = 0,55$. Donc,

$$\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = a_n - 0,2a_n + 0,1b_n = 0,8a_n + 0,1b_n,$$

et

$$b_{n+1} = b_n - 0,1b_n + 0,2a_n = 0,2a_n + 0,9b_n.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,1b_n \\ 0,2a_n + 0,9b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MU_n$$

où $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}.}$$

d) D'après le résultat admis par l'énoncé, $U_3 = M^3U_0 = M^2 \times MU_0 = M^2 \times U_1$. Donc,

$$\begin{aligned} U_3 &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8\times 0,8 + 0,1\times 0,2 & 0,8\times 0,1 + 0,1\times 0,9 \\ 0,2\times 0,8 + 0,9\times 0,2 & 0,2\times 0,1 + 0,9\times 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,66 & 0,17 \\ 0,34 & 0,83 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66\times 0,45 + 0,17\times 0,55 \\ 0,34\times 0,45 + 0,83\times 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3905 \\ 0,6095 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{a_3 = 0,3905 \text{ et } b_3 = 0,6095.}$$

2) a)

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 1\times 2 & 1\times 1 + 1\times(-1) \\ 2\times 1 + (-1)\times 2 & 2\times 1 + (-1)\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I_2. \end{aligned}$$

Donc $P \times \left(\frac{1}{3}P\right) = \left(\frac{1}{3}P\right) \times P = I_2$. Ceci montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{3}P$.

b)

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P^{-1}MP = D$ où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

- D'après la question précédente, $P^{-1}MP = D$. Donc $PP^{-1}MPP^{-1} = PDP^{-1}$ puis $I_2MI_2 = PDP^{-1}$ et finalement $M^1 = PDP^{-1}$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \times M \\
&= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} \\
&= PD^{n+1}P^{-1}.
\end{aligned}$$

On a montré récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1+2\times 0,7^n}{3} \times a_0 + \frac{1-0,7^n}{3} \times b_0 = 0,5\left(\frac{1+2\times 0,7^n}{3} + \frac{1-0,7^n}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2+0,7^n}{3} \\
&= \frac{2+0,7^n}{6}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2-2\times 0,7^n}{3} \times a_0 + \frac{2+0,7^n}{3} \times b_0 = 0,5\left(\frac{2-2\times 0,7^n}{3} + \frac{2+0,7^n}{3}\right) \\
&= \frac{4-0,7^n}{6}
\end{aligned}$$

Puisque $-1 < 0,7 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Au bout d'un grand nombre de jours, la répartition des souris dans les compartiments A et B de la cage se stablisera, environ $\frac{1}{3}$ des souris occupant le compartiment A et $\frac{2}{3}$ des souris occupant le compartiment B.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.