

France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) $f(x_A) = 0 + 1 + a \times 0 = 1 = y_A$. Donc, la courbe \mathcal{C} passe par le point A.

b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{0 - 1} = -2.$$

c) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 + 0 + a \left(1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x) \times e^{-x^2} \right) = 1 + a(1 - 2x^2)e^{-x^2} = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

d) Puisque la droite (AB) est tangente à la courbe \mathcal{C} au point A, le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point A est -2 d'après la question b). Ce coefficient directeur est aussi $f'(0)$ avec $f'(0) = 1 - a \times (-1) \times e^0 = 1 + a$ puis

$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow 1 + a = -2 \Leftrightarrow a = -3.$$

$$a = -3.$$

2) a) Soit $x \in] -1, 0]$. $e^{-x^2} > 0$ et $-3x \geq 0$. Donc $-3xe^{-x^2} \geq 0$. D'autre part, $x > -1$ et donc $x + 1 > 0$. En additionnant, on obtient $f(x) > 0$. On a montré que

pour tout réel x de l'intervalle $] -1 ; 0]$, $f(x) > 0$.

b) Soit $x \in] -\infty, -1]$. Alors $x \leq -1$ puis $x^2 \geq 1$ et donc $2x^2 - 1 \geq 2 \times 1 - 1$ ou encore $2x^2 - 1 \geq 1$. En particulier, $2x^2 - 1 \geq 0$. Comme d'autre part $3e^{-x^2} \geq 0$, on en déduit que $3(2x^2 - 1)e^{-x^2} \geq 0$ puis que $f'(x) \geq 1$. En particulier, $f'(x) > 0$.

pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; -1]$, $f'(x) > 0$.

c) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on sait que pour tout réel k de l'intervalle $\left[f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1)\right]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$.

Puisque $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}e^{-9/4} = -0,02\dots < 0$ et que $f(-1) = 3e^{-1} > 0$, le réel 0 appartient à l'intervalle $\left[f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1)\right]$. Ceci montre qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Ensuite, $f\left(-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}\right) = 0,01\dots > 0$. Ainsi, $f\left(-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}\right) > f(c)$ et les deux nombres c et $-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$ sont dans $] -\infty, -1]$.

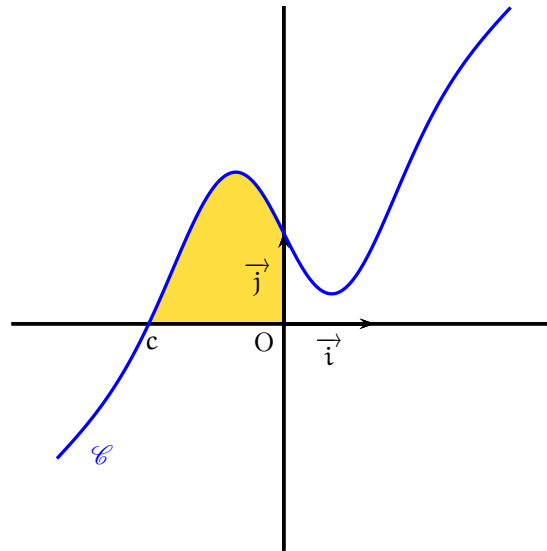
Puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty, -1]$, on en déduit que $c < -\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$.

3) a) La fonction f est croissante sur $[c, -1]$ et $f(c) = 0$. Donc, la fonction f est positive sur l'intervalle $[c, -1]$. D'autre part, la fonction f est positive sur l'intervalle $[-1, 0]$ d'après la question 2) a) et finalement la fonction f est positive sur l'intervalle $[c, 0]$.

Ainsi, la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[c, 0]$ et donc $\mathcal{A} = \int_c^0 f(x) dx$.

b)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{3}{2}}^0 f(x) dx = \int_{-\frac{3}{2}}^0 \left(x + 1 + \frac{3}{2}(-2x)e^{-x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}e^{-x^2} \right]_{-\frac{3}{2}}^0 \\ &= \left(\frac{0^2}{2} + 0 + \frac{3}{2}e^0 \right) - \left(\frac{(-3/2)^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-(-3/2)^2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}} = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}. \end{aligned}$$



EXERCICE 2

1) a) L'énoncé dit que $E(X) = 10$ et donc $\frac{1}{\lambda} = 10$ puis $\lambda = \frac{1}{10} = 0,1$.

b) La probabilité demandée est $p(10 \leq X \leq 20)$. On sait que pour tout réel t ,

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = (-e^{-\lambda t}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$p(10 \leq X \leq 20) = p(X \leq 20) - p(X \leq 10) = (1 - e^{-0,1 \times 20}) - (1 - e^{-0,1 \times 10}) = e^{-1} - e^{-2}.$$

La calculatrice donne

$$p(10 \leq X \leq 20) = e^{-1} - e^{-2} = 0,2325 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

c) La probabilité demandée est $p_{X \geq 10}(X \geq 15)$.

$$p_{X \geq 10}(X \geq 15) = \frac{p((X \geq 10) \cap (X \geq 15))}{p(X \geq 10)} = \frac{p(X \geq 15)}{p(X \geq 10)} = \frac{1 - p(X \leq 15)}{1 - p(X \leq 10)} = \frac{e^{-0,1 \times 15}}{e^{-0,1 \times 10}} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-1}} = e^{-1,5+1} = e^{-0,5}.$$

La calculatrice donne

$$p_{X \geq 10}(X \geq 15) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

2) a) L'énoncé dit que les paramètres de la loi Y sont n et $p = 0,8$. On sait alors que $E(Y) = np = 0,8n$ et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}$.

$$E(Y) = 0,8n \text{ et } \sigma(Y) = \sqrt{0,16n}.$$

b) La calculatrice fournit $p_1 = p(Z \leq 71) = 0,9575$ arrondi à 10^{-4} .

c) Puisque le restaurant a une capacité d'accueil de 70 places, la probabilité demandée est $p(Y > 70)$. Or $p(Y > 70) = 1 - p(Y \leq 70)$ avec $p(Y \leq 70) = 0,96$ à 10^{-2} près. Donc

$$p(Y > 70) = 0,04 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Le restaurant a environ 4 chances sur 100 de ne pas pouvoir accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent.

EXERCICE 3

1) a) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} = u_n - \frac{20}{100} \times u_n = 0,8u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 0,8^n.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_n < \frac{1}{100} \times u_0 &\Leftrightarrow 10 \times 0,8^n < 0,01 \times 10 \Leftrightarrow 0,8^n < 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,8^n) < \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,8) < \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\ &\Leftrightarrow n > 20,6\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

La quantité de médicament restant dans le sang deviendra inférieure à 1 % de la quantité initiale au bout de 21 minutes.

2) a) **Tableau de valeurs.**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	5,12	4,10	3,28	2,68	2,15	1,72	1,38	1,11	0,89	0,71	0,57	0,46	0,37

b) En 15 minutes, il a été injecté 10 ml de médicament puis 4 ml à la minute n° 4 puis 4 ml à la minute n° 7 puis 4 ml à la minute n° 10 et encore 4 ml à la minute n° 13. Au total, il a été injecté $10 + 4 + 4 + 4 + 4 = 26$ ml de médicament.

c) **Algorithme modifié.**

Variables :	n est un entier naturel v est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10
Traitement	Pour n allant de 1 à 30 Affecter à v la valeur $0,8 \times v$ Si $v \leq 6$ alors affecter à v la valeur $v + 2$ Afficher v Fin de boucle

3) a) Soit n un entier naturel. w_{n+1} est obtenu en enlevant à w_n 20 % de sa valeur puis en ajoutant 1 ml de médicament. Donc

$$w_{n+1} = w_n - 0,2w_n + 1 = 0,8w_n + 1.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8w_n + 1 - 5 = 0,8w_n - 4 = 0,8 \left(w_n - \frac{4}{0,8} \right) = 0,8(w_n - 5) = 0,8z_n.$$

De plus, $z_0 = w_0 - 5 = 10 - 5 = 5$. On a montré que la suite (z_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,8$ et le premier terme $z_0 = 5$.

c) On sait alors que pour tout entier naturel n ,

$$z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$w_n = 5 + z_n = 5 + 5 \times 0,8^n.$$

Pour tout entier naturel n , $w_n = 5 + 5 \times 0,8^n$.

d) Puisque $-1 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 5 + 5 \times 0 = 5$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 5.$$

Ceci signifie qu'au bout d'un long moment, la quantité de médicament dans le sang sera à peu près constante, égale à environ 5 ml.

EXERCICE 4

1) a) $a_1 = a_0 - 0,2a_0 + 0,1b_0 = 0,8a_0 + 0,1b_0 = (0,8 + 0,1) \times 0,5 = 0,9 \times 0,5 = 0,45$ et $b_1 = b_0 - 0,1b_0 + 0,2a_0 = 0,9b_0 + 0,2a_0 = (0,9 + 0,2) \times 0,5 = 0,55$. Donc,

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = a_n - 0,2a_n + 0,1b_n = 0,8a_n + 0,1b_n,$$

et

$$b_{n+1} = b_n - 0,1b_n + 0,2a_n = 0,2a_n + 0,9b_n.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,1b_n \\ 0,2a_n + 0,9b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MU_n$$

où $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

d) D'après le résultat admis par l'énoncé, $U_3 = M^3U_0 = M^2 \times MU_0 = M^2 \times U_1$. Donc,

$$\begin{aligned} U_3 &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,8 + 0,1 \times 0,2 & 0,8 \times 0,1 + 0,1 \times 0,9 \\ 0,2 \times 0,8 + 0,9 \times 0,2 & 0,2 \times 0,1 + 0,9 \times 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,66 & 0,17 \\ 0,34 & 0,83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66 \times 0,45 + 0,17 \times 0,55 \\ 0,34 \times 0,45 + 0,83 \times 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3905 \\ 0,6095 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a_3 = 0,3905 \text{ et } b_3 = 0,6095.$$

2) a)

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 1 + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I_2. \end{aligned}$$

Donc $P \times \left(\frac{1}{3}P\right) = \left(\frac{1}{3}P\right) \times P = I_2$. Ceci montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{3}P$.

b)

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P^{-1}MP = D$ où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^n P^{-1}$.

- D'après la question précédente, $P^{-1}MP = D$. Donc $PP^{-1}MPP^{-1} = PDP^{-1}$ puis $I_2MI_2 = PDP^{-1}$ et finalement $M^1 = PDP^{-1}$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.

- Soit $n \geq 1$. Supposons que $M^n = PD^n P^{-1}$ et montrons que $M^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^n P^{-1} PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^n I_2 DP^{-1} = PD^n DP^{-1} \\ &= PD^{n+1} P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^n P^{-1}$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} \times a_0 + \frac{1 - 0,7^n}{3} \times b_0 = 0,5 \left(\frac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} + \frac{1 - 0,7^n}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2 + 0,7^n}{3} \\ &= \frac{2 + 0,7^n}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} \times a_0 + \frac{2 + 0,7^n}{3} \times b_0 = 0,5 \left(\frac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} + \frac{2 + 0,7^n}{3} \right) \\ &= \frac{4 - 0,7^n}{6} \end{aligned}$$

Puisque $-1 < 0,7 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Au bout d'un grand nombre de jours, la répartition des souris dans les compartiments A et B de la cage se stabilisera, environ $\frac{1}{3}$ des souris occupant le compartiment A et $\frac{2}{3}$ des souris occupant le compartiment B.