

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

- 1) Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
- 2) Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.
- 3) Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D , suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- 1) On sait que $P(D \leq 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ .
- 2) On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ . Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

- 1) Soit $X = \frac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
- 2) On sait que $P(J \leq 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

EXERCICE 2 (6 points)

(commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

- 1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 2) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe \mathcal{C}_f et la droite Δ , les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .
Laisser les tracés explicatifs apparents.
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- 3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 4) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $xe^{-x} = x$.
Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100} .

EXERCICE 3 (3 points)**(commun à tous les candidats)**On considère l'équation (E_1) :

$$e^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.**1)** Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2) Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

EXERCICE 4 (5 points)

(réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Un graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1) Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$.

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

On laissera les traits de construction apparents.

3) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4) Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1 ; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Tracer (F) sur le graphique.

5) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

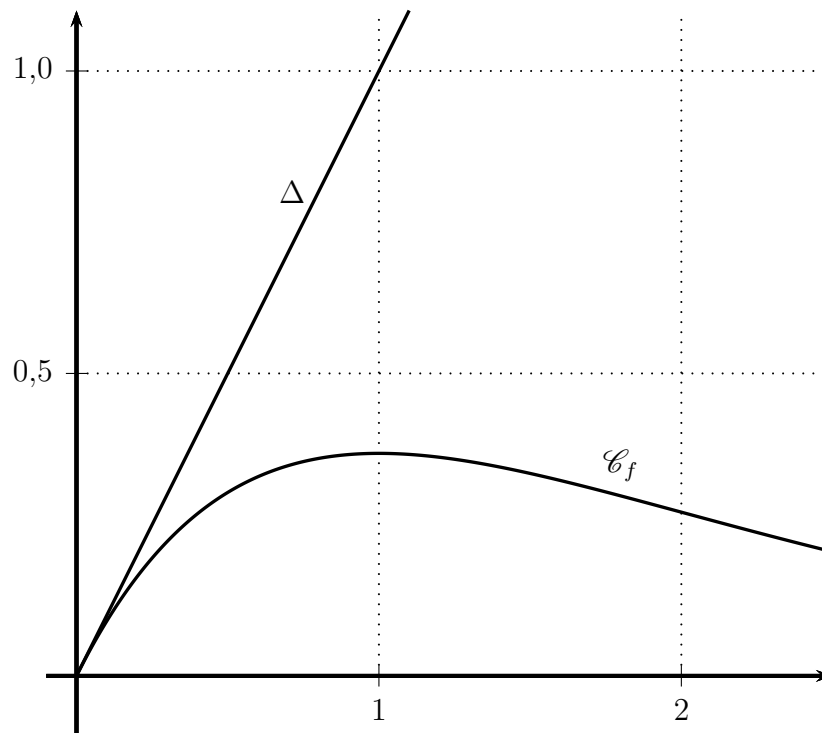
Compléter le graphique en traçant ces droites.

6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F) .

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe, Exercice 2

Partie B - Question 1



Partie C

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur S prend la valeur
Traitement :	Pour k variant de 1 à u prend la valeur $u \times e^{-u}$ S prend la valeur Fin Pour Afficher