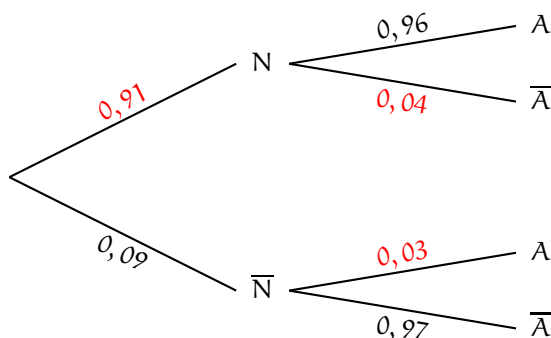


EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $P(A)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = P(N \cap A) + P(\bar{N} \cap A) = P(N) \times P_N(A) + P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(A) = (1 - 0,09) \times 0,96 + 0,09 \times (1 - 0,97) = 0,91 \times 0,96 + 0,09 \times 0,03 = 0,8736 + 0,0027 = 0,8763.$$

$$P(A) = 0,8763.$$

3) La probabilité demandée est $P_A(N)$.

$$P_A(N) = \frac{P(A \cap N)}{P(A)} = \frac{P(N) \times P_N(A)}{P(A)} = \frac{0,91 \times 0,96}{0,8763} = 0,9969 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$P_A(N) = 0,9969 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

Partie B

1) L'égalité $P(D \leq 0,4) = 0,5$ signifie que l'on a une chance sur deux que la durée de vie d'une peluche soit inférieure ou égale à 4 ans.

On sait que pour tout réel positif t ,

$$P(D \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = (-e^{-\lambda t}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$P(D \leq 4) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow -4\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.$$

$$\lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.$$

La calculatrice fournit $\lambda = 0,17328\dots$

2) La probabilité demandée est $P_{D \geq 3}(D \geq 3 + 5)$.

$$P_{D \geq 3}(D \geq 8) = \frac{P((X \geq 3) \cap (X \geq 8))}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X \geq 8)}{P(X \geq 3)} = \frac{1 - (1 - e^{-8\lambda})}{1 - (1 - e^{-3\lambda})} = \frac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-8\lambda + 3\lambda} = e^{-5\lambda} = e^{-5 \times 0,1733} = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$P_{D \geq 3} (D \geq 8) = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

Partie C

1) On sait que X suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

2) $J \leq 385 \Leftrightarrow J - 358 \leq 27 \Leftrightarrow \frac{J - 358}{\sigma} \leq \frac{27}{\sigma}$. La calculatrice fournit

$$P(J \leq 385) = 0,975 \Leftrightarrow P\left(X \leq \frac{27}{\sigma}\right) = 0,975 \Leftrightarrow \frac{27}{\sigma} = 1,9599 \dots \Leftrightarrow \sigma = 13,7 \dots$$

Donc

$$\sigma = 14 \text{ arrondi à l'entier le plus proche.}$$

EXERCICE 2

Partie A

1) En posant $X = -x$, on obtient d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} -X e^X = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x ,

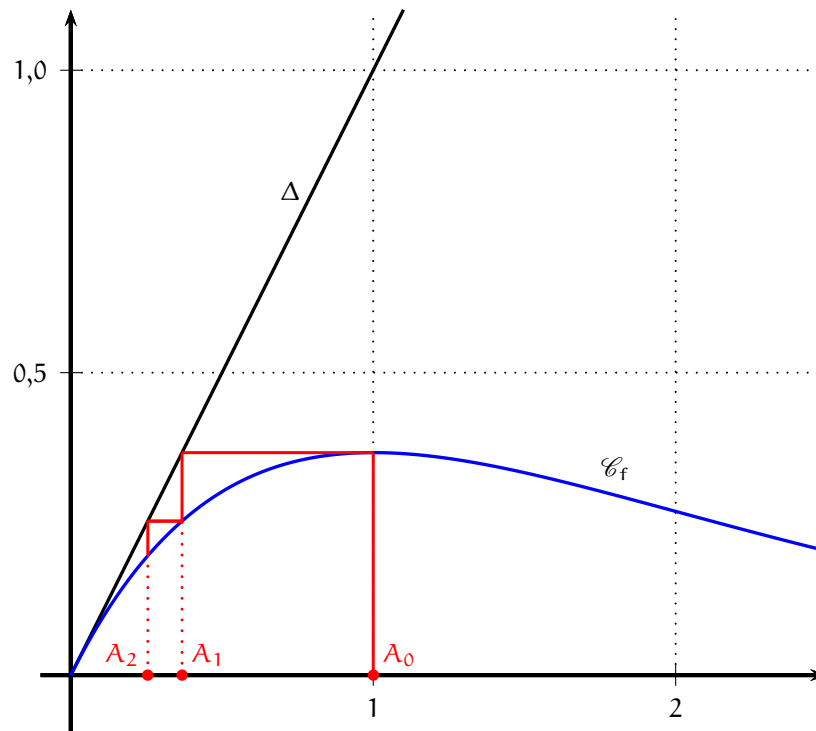
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x , on a $e^{-x} > 0$. Donc, pour tout réel positif x , $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
f	0	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

Partie B

1) Représentation graphique de la suite (u_n) .



2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

- $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.
On a $u_n > 0$ et $e^{-u_n} > 0$. Puisque $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, on a donc $u_{n+1} > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

3) Soit n un entier naturel. Puisque $u_n \neq 0$, on peut écrire $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$. Puisque $u_n > 0$, on a $-u_n < 0$ puis $e^{-u_n} < 1$ et finalement $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Puisque $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} < u_n$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} < u_n$ et donc que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4) a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite (u_n) est convergente. Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

b) Soit x un réel positif.

$$xe^{-x} = x \Leftrightarrow x(e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Puisque pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell \geq 0$. Mais alors, d'après le résultat admis par l'énoncé, ℓ est un réel positif ou nul, solution de l'équation $xe^{-x} = x$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Partie C

Algorithme complété.

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur 1 S prend la valeur u
Traitement :	Pour k variant de 1 à 100. u prend la valeur $u \times e^{-u}$ S prend la valeur $S + u$ Fin Pour Afficher S

EXERCICE 3

1) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned} e^x - x^n = 0 &\Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow x = \ln(x^n) \Leftrightarrow x = n \ln(x) \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \ln(x) - \frac{x}{n} = 0. \end{aligned}$$

Donc, sur $]0, +\infty[$, l'équation (E_1) est équivalente à l'équation $(E_2) : \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Pour $x > 0$, posons $f_n(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$.

• La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$f'_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} = \frac{n-x}{nx} = -\frac{x-n}{nx}.$$

La fonction f'_n est strictement positive sur $]0, n[$ et strictement négative sur $]n, +\infty[$. On en déduit que la fonction f_n est strictement croissante sur $]0, n]$ et strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{n} = 0$. En additionnant, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(x) - \frac{x}{n} \right) = -\infty$.

• Pour tout réel $x > 0$,

$$f_n(x) = -\frac{x}{n} + \ln(x) = -\frac{x}{n} \left(1 - \frac{n}{x} \times \ln(x) \right) = -\frac{x}{n} \left(1 - n \frac{\ln(x)}{x} \right).$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - n \frac{\ln(x)}{x} \right) = 1 - n \times 0 = 1$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{n} = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$.

• $f_n(n) = \ln(n) - \frac{n}{n} = \ln(n) - 1$.

• On peut dresser le tableau de variation de la fonction f_n :

x	0	n	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		\nearrow	\searrow
		$\ln(n) - 1$	
		$-\infty$	$-\infty$

On note que la fonction f_n admet un maximum en n égal à $\ln(n) - 1$.

• $f_n(n) < 0 \Leftrightarrow \ln(n) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(n) < 1 \Leftrightarrow n < e$ et $f_n(n) > 0 \Leftrightarrow n > e$.

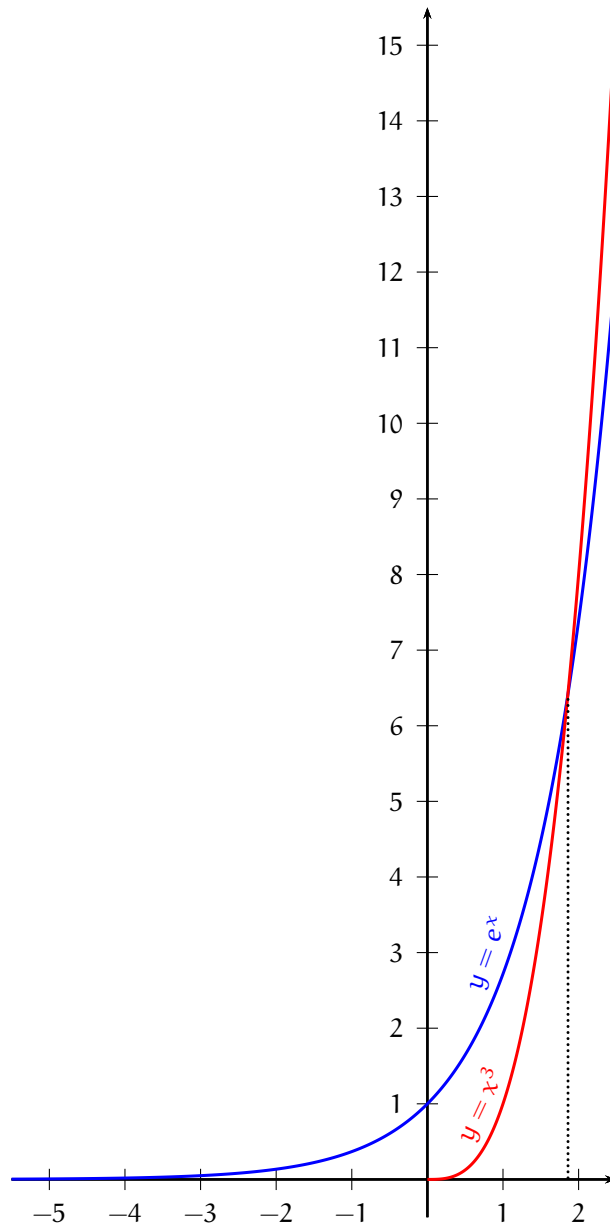
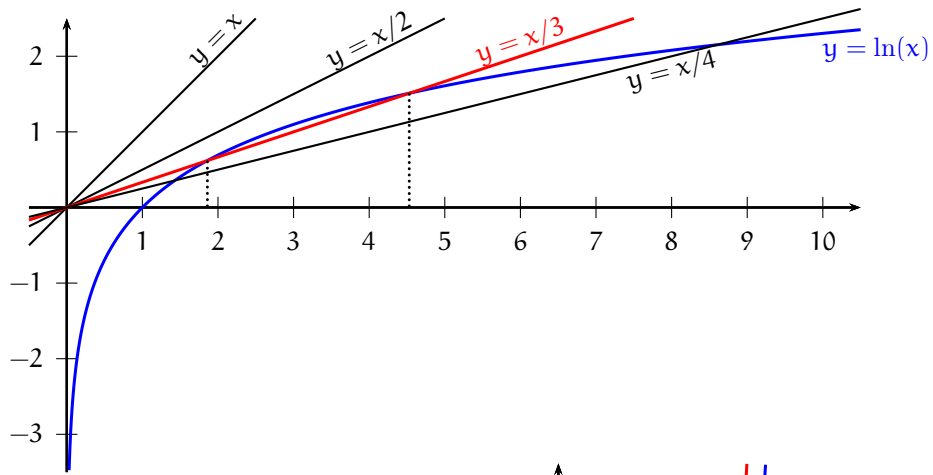
Puisque $e = 2,7\dots$, si $n = 1$ ou $n = 2$, $f_n(n) < 0$ et si $n \geq 3$, $f_n(n) > 0$.

• Si $n = 1$ ou $n = 2$, la fonction f_n admet un maximum strictement négatif et en particulier, la fonction f_n ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Dans ce cas, l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.

Supposons dorénavant $n \geq 3$. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0, n]$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(n) > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0, n]$ et même $]0, n[$. De même, la fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]n, +\infty[$. De plus, $f_n(n) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$. La fonction f_n s'annule donc une et une seule fois sur l'intervalle $]n, +\infty[$ et même $]n, +\infty[$. Finalement, la fonction f_n s'annule exactement deux fois dans l'intervalle $]0, +\infty[$ ou encore l'équation (E_1) a exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

On a montré que les entiers naturels n pour lesquels l'équation (E_1) admet deux solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 3.



EXERCICE 4

1)

$$f(-1 + i\sqrt{3}) = (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5.$$

$$f(-1 + i\sqrt{3}) = 5.$$

2) Pour tout nombre complexe z , $f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$.

Le discriminant de l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$. L'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \frac{-2 + i\sqrt{12}}{2} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i\sqrt{3}$.

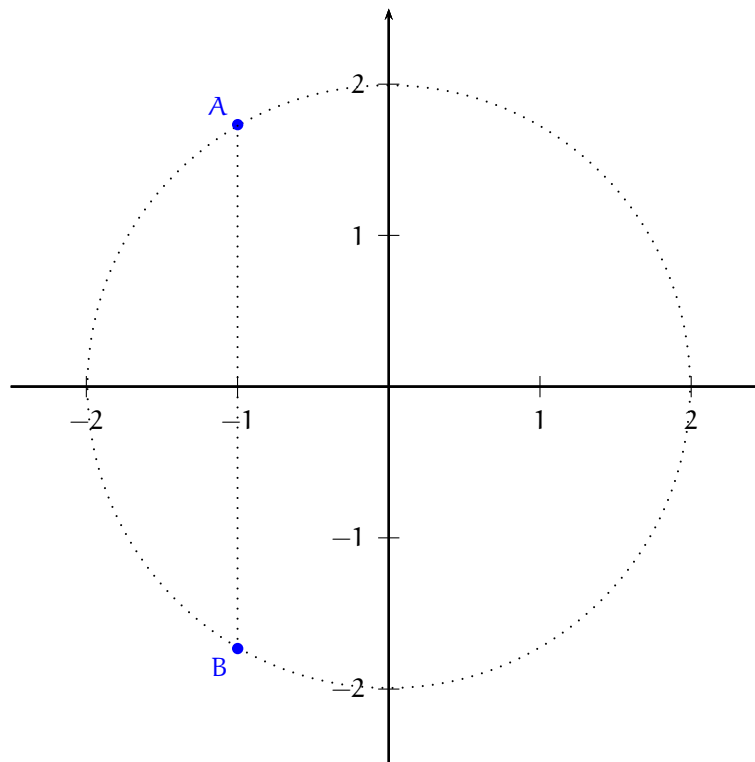
$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ puis}$$

$$z_1 = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 2e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

et aussi $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Les solutions de l'équation $f(z) = 5$ sont $z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Figure. A est le point du cercle de centre O et de rayon 2, d'abscisse -1 et d'ordonnée positive.



3) Soit λ un nombre réel. Pour tout nombre complexe z , $f(z) = \lambda \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$.

Le discriminant de l'équation $z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$ est

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (9 - \lambda) = 4\lambda - 32.$$

L'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si et seulement si $\Delta < 0$ ce qui équivaut à $4\lambda - 32 < 0$ ou enfin à $\lambda < 8$.

L'ensemble cherché est $] -\infty, 8[$.

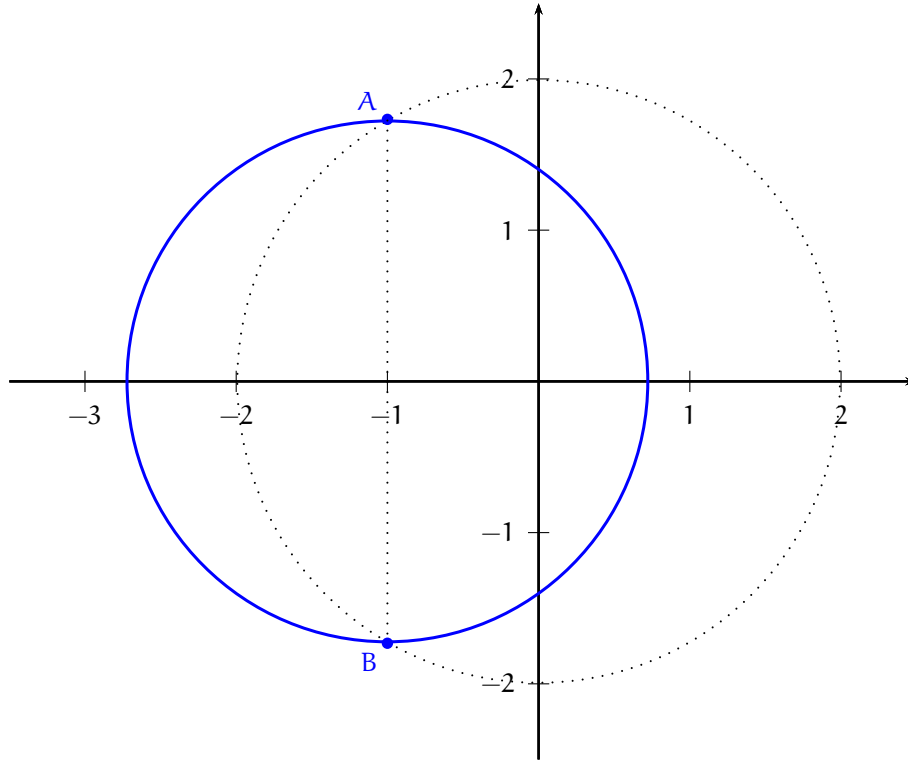
4) Soit z un nombre complexe. Soit M le point du plan d'affixe z .

$$\begin{aligned} |f(z) - 8| = 3 &\Leftrightarrow |z^2 + 2z + 1| = 3 \Leftrightarrow |(z+1)^2| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow |z - (-1)| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc, (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. On note que les points A et B appartiennent à (F) car

$$f(z_1) = 5 \Rightarrow f(z_1) - 8 = -3 \Rightarrow |f(z_1) - 8| = 3,$$

et de même pour z_2 .



5) a) Soit z un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

$$f(z) = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 = x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b) Par suite,

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \text{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow 2xy + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

(E) est la réunion de la droite D_1 d'équation $y = 0$ et de la droite D_2 d'équation $x = -1$. Voir graphique à la fin.

6) • Soit $M(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, un point de \mathcal{D}_1 puis $z = x$ l'affixe de M .

$$M \in (F) \Leftrightarrow |x + 1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3} \text{ ou } x = -1 - \sqrt{3}.$$

Les points d'intersection de (F) et \mathcal{D}_1 sont les points C $(-1 - \sqrt{3}, 0)$ et D $(-1 + \sqrt{3}, 0)$.

• Soit $M(-1, y)$, $y \in \mathbb{R}$, un point de \mathcal{D}_2 puis $z = iy$ l'affixe de M .

$$M \in (F) \Leftrightarrow |-1 + iy + 1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |iy| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |i| \times |y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3}.$$

Les points d'intersection de (F) et \mathcal{D}_2 sont les points A $(-1, \sqrt{3})$ et B $(-1, -\sqrt{3})$.

Finalement, les points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont les points A $(-1, \sqrt{3})$, B $(-1, -\sqrt{3})$, C $(-1 - \sqrt{3}, 0)$ et D $(-1 + \sqrt{3}, 0)$.

Remarque. On devait obtenir au moins les points A et B car par exemple, d'après 2),

$$f(z_A) = 5 \Rightarrow \begin{cases} f(z_A) \in \mathbb{R} \\ f(z_A) - 8 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(z_A) \in \mathbb{R} \\ |f(z_A) - 8| = 3 \end{cases} \Rightarrow A \in (E) \cap (F).$$

