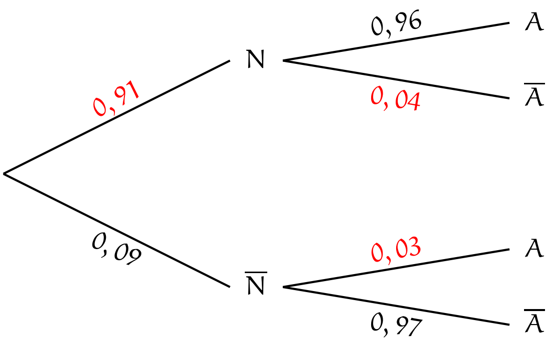
# Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

**EXERCICE 1**

**Partie A**

**1)** Représentons la situation par un arbre de probabilités.




**2)** La probabilité demandée est $P(A)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(A) &= P(N\cap A)+P\left(\overline{N}\cap A\right) = P(N)\times P_N(A)+P\left(\overline{N}\right)\times P_{\overline{N}}(A) = (1-0,09)\times 0,96+0,09\times(1-0,97)\\ &= 0,91\times 0,96+0,09\times 0,03 = 0,8736+0,0027 = 0,8763.\end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = 0,876\,3.}$$

**3)** La probabilité demandée est $P_A(N)$.

$$P_A(N) = \frac{P(A\cap N)}{P(A)} = \frac{P(N)\times P_N(A)}{P(A)} = \frac{0,91\times 0,96}{0,8763} = 0,9969 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$\boxed{P_A(N) = 0,996\,9 \text{ arrondi au dix-millième.}}$$

**Partie B**

**1)** L'égalité $P(D \leqslant 0,4) = 0,5$ signifie que l'on a une chance sur deux que la durée de vie d'une peluche soit inférieure ou égale à 4 ans.

On sait que pour tout réel positif $t$,

$$P(D\leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right)-\left(-e^{0}\right) = 1-e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$P(D\leqslant 4) = 0,5 \Leftrightarrow 1-e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow -4\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.}$$

La calculatrice fournit $\lambda = 0,173\,28\ldots$

**2)** La probabilité demandée est $P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3+5)$.

$$\begin{aligned}P_{D\geqslant 3}(D\geqslant 8) &= \frac{P((X\geqslant 3)\cap(X\geqslant 8))}{P(X\geqslant 3)} = \frac{P(X\geqslant 8)}{P(X\geqslant 3)} = \frac{1-\left(1-e^{-8\lambda}\right)}{1-\left(1-e^{-3\lambda}\right)} = \frac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}}\\ &= e^{-8\lambda+3\lambda} = e^{-5\lambda} = e^{-5\times 0,1733} = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}\end{aligned}$$

$$\boxed{P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 8) = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}}$$

**Partie C**

**1)** On sait que $X$ suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne $0$ et d'écart-type $1$.

**2)** $J \leqslant 385 \Leftrightarrow J - 358 \leqslant 27 \Leftrightarrow \dfrac{J-358}{\sigma} \leqslant \dfrac{27}{\sigma}$. La calculatrice fournit

$$P(J \leqslant 385) = 0,975 \Leftrightarrow P\left(X \leqslant \frac{27}{\sigma}\right) = 0,975 \Leftrightarrow \frac{27}{\sigma} = 1,9599\ldots \Leftrightarrow \sigma = 13,7\ldots$$

Donc

$$\boxed{\sigma = 14 \text{ arrondi à l'entier le plus proche.}}$$

**EXERCICE 2**

**Partie A**

**1)** En posant $X = -x$, on obtient d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{X \to -\infty} -Xe^{X} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

**2)** $f$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif $x$,

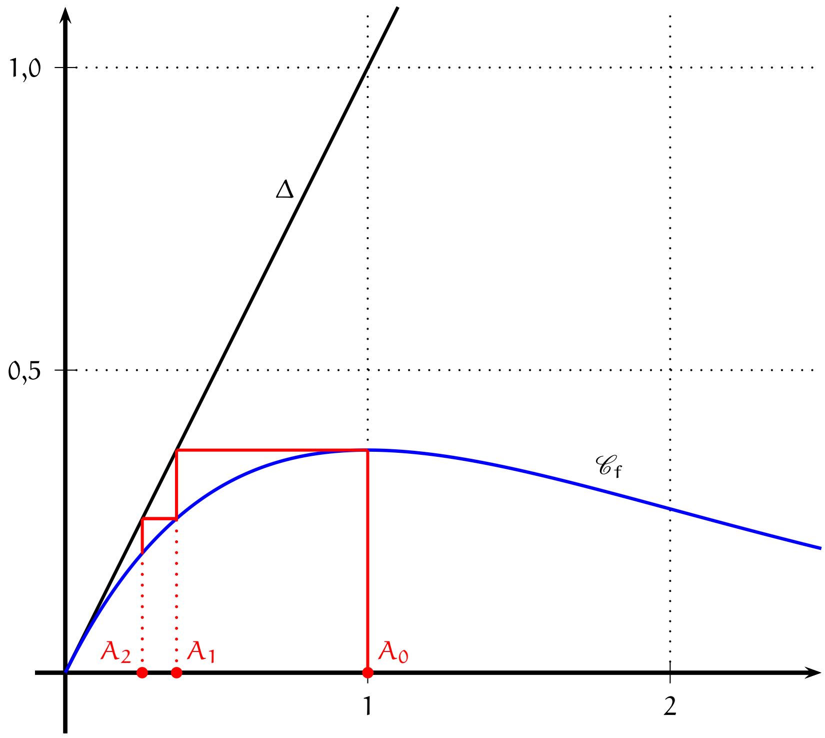
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif $x$, on a $e^{-x} > 0$. Donc, pour tout réel positif $x$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction $f$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

**Partie B**

**1) Représentation graphique de la suite $(u_n)$.**




**2)** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

- $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.
  On a $u_n > 0$ et $e^{-u_n} > 0$. Puisque $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, on a donc $u_{n+1} > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

**3)** Soit $n$ un entier naturel. Puisque $u_n \neq 0$, on peut écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$. Puisque $u_n > 0$, on a $-u_n < 0$ puis $e^{-u_n} < 1$ et finalement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Puisque $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} < u_n$.

On a montré que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} < u_n$ et donc que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

**4) a)** La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par $0$. On en déduit que la suite $(u_n)$ est convergente. Posons $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

**b)** Soit $x$ un réel positif.

$$xe^{-x} = x \Leftrightarrow x\left(e^{-x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Puisque pour tout entier naturel $n$, on a $u_n > 0$, quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $\ell \geqslant 0$. Mais alors, d'après le résultat admis par l'énoncé, $\ell$ est un réel positif ou nul, solution de l'équation $xe^{-x} = x$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

**Partie C**

**Algorithme complété.**

| | |
|---|---|
| **Déclaration des variables :** | $S$ et $u$ sont des nombres réels<br>$k$ est un nombre entier |
| **Initialisation :** | $u$ prend la valeur $1$<br>$S$ prend la valeur $u$ |
| **Traitement :** | Pour $k$ variant de 1 à $100$.<br>    $u$ prend la valeur $u \times e^{-u}$<br>    $S$ prend la valeur $S + u$<br>Fin Pour<br>Afficher $S$ |

**EXERCICE 3**

**1)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $x$ strictement positif,

$$e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow x = \ln\left(x^n\right) \Leftrightarrow x = n\ln(x) \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln(x)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

Donc, sur $]0, +\infty[$, l'équation $(E_1)$ est équivalente à l'équation $(E_2)$ : $\ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$.

**2)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour $x > 0$, posons $f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$.

• La fonction $f_n$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x$ strictement positif,

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} = \frac{n-x}{nx} = -\frac{x-n}{nx}.$$

La fonction $f_n'$ est strictement positive sur $]0, n[$ et strictement négative sur $]n, +\infty[$. On en déduit que la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $]0, n]$ et strcitement décroissante sur $[n, +\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{x}{n} = 0$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} \left(\ln(x) - \dfrac{x}{n}\right) = -\infty$.

• Pour tout réel $x > 0$,

$$f_n(x) = -\frac{x}{n} + \ln(x) = -\frac{x}{n}\left(1 - \frac{n}{x} \times \ln(x)\right) = -\frac{x}{n}\left(1 - n\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - n\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1 - n \times 0 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{n} = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$.

• $f_n(n) = \ln(n) - \dfrac{n}{n} = \ln(n) - 1$.

• On peut dresser le tableau de variation de la fonction $f_n$ :

| $x$ | $0$ | | $n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | ‖ | | $\ln(n) - 1$ | | |
| | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-\infty$ |

On note que la fonction $f_n$ admet un maximum en $n$ égal à $\ln(n) - 1$.

• $f_n(n) < 0 \Leftrightarrow \ln(n) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(n) < 1 \Leftrightarrow n < e$ et $f_n(n) > 0 \Leftrightarrow n > e$.

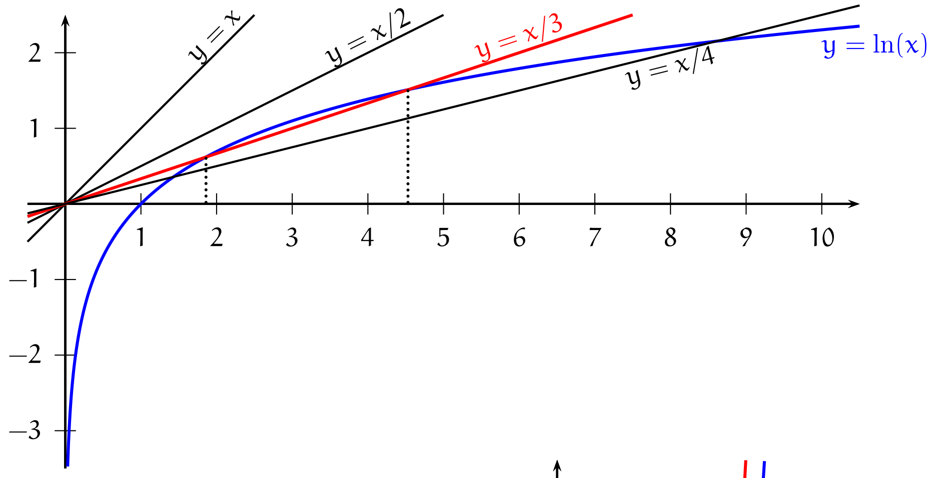
Puisque $e = 2,7\ldots$, si $n = 1$ ou $n = 2$, $f_n(n) < 0$ et si $n \geqslant 3$, $f_n(n) > 0$.

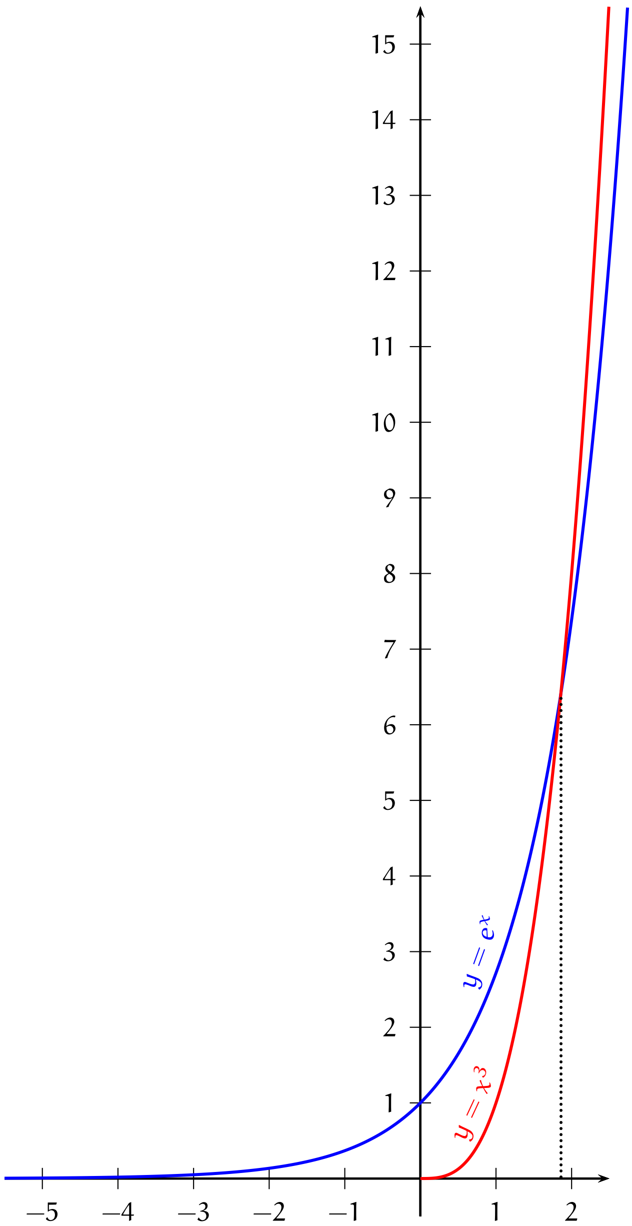
• Si $n = 1$ ou $n = 2$, la fonction $f_n$ admet un maximum strictement négatif et en particulier, la fonction $f_n$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Dans ce cas, l'équation $(E_1)$ n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.

Supposons dorénavant $n \geqslant 3$. La fonction $f_n$ est continue et strictement croissante sur $]0, n]$.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(n) > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $f_n$ s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0, n]$ et même $]0, n[$. De même, la fonction $f_n$ est continue et strictement décroissante sur $]n, +\infty]$. De plus, $f_n(n) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$. La fonction $f_n$ s'annule donc une et une seule fois sur l'intervalle $[n, +\infty[$ et même $]n, +\infty[$. Finalement, la fonction $f_n$ s'annule exactement deux fois dans l'intervalle $]0, +\infty[$ ou encore l'équation $(E_1)$ a exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

On a montré que les entiers naturels $n$ pour lesquels l'équation $(E_1)$ admet deux solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 3.


y = x
y = x/2
y = x/3
y = x/4
y = ln(x)


y = e^x
y = x^3

**EXERCICE 4**

**1)**

$$f\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+2\left(-1+i\sqrt{3}\right)+9=1-2i\sqrt{3}-3-2+2i\sqrt{3}+9=5.$$

$$\boxed{f\left(-1+i\sqrt{3}\right)=5.}$$

**2)** Pour tout nombre complexe $z$, $f(z)=5\Leftrightarrow z^2+2z+4=0$.

Le discriminant de l'équation $z^2+2z+4=0$ est $\Delta=2^2-4\times1\times4=-12<0$. L'équation $z^2+2z+4=0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1=\dfrac{-2+i\sqrt{12}}{2}=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$ et $z_2=\overline{z_1}=-1-i\sqrt{3}$.

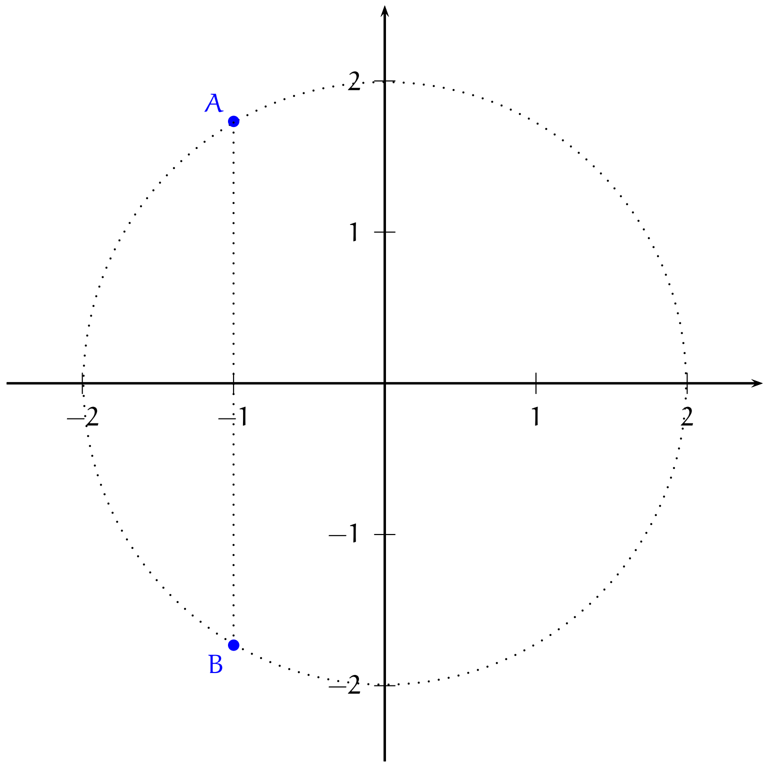
$|z_1|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$ puis

$$z_1=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

et aussi $z_2=\overline{z_1}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(z)=5 \text{ sont } z_1=-1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } z_2=\overline{z_1}=-1-i\sqrt{3}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}.}$$

**Figure.** A est le point du cercle de centre O et de rayon 2, d'abscisse $-1$ et d'ordonnée positive.




**3)** Soit $\lambda$ un nombre réel. Pour tout nombre complexe $z$, $f(z)=\lambda\Leftrightarrow z^2+2z+9-\lambda=0$.

Le discriminant de l'équation $z^2+2z+9-\lambda=0$ est

$$\Delta=2^2-4\times1\times(9-\lambda)=4\lambda-32.$$

L'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si et seulement si $\Delta<0$ ce qui équivaut à $4\lambda-32<0$ ou enfin à $\lambda<8$.

$$\boxed{\text{L'ensemble cherché est } ]-\infty,8[.}$$

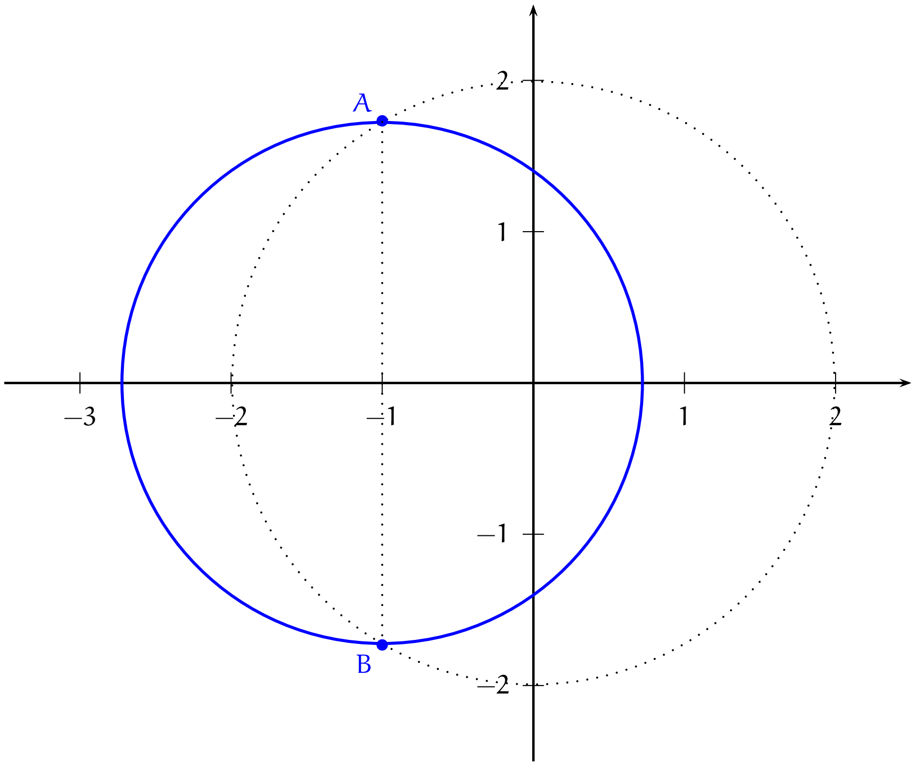
**4)** Soit $z$ un nombre complexe. Soit $M$ le point du plan d'affixe $z$.

$$|f(z) - 8| = 3 \Leftrightarrow \left|z^2 + 2z + 1\right| = 3 \Leftrightarrow \left|(z+1)^2\right| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow |z - (-1)| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{3}.$$

Donc, $(F)$ est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. On note que les points $A$ et $B$ appartiennent à $(F)$ car

$$f(z_1) = 5 \Rightarrow f(z_1) - 8 = -3 \Rightarrow |f(z_1) - 8| = 3,$$

et de même pour $z_2$.




**5) a)** Soit $z$ un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont des nombres réels.

$$f(z) = (x+iy)^2 + 2(x+iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 = x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

**b)** Par suite,

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow 2xy + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1.$$

$(E)$ est la réunion de la droite $D_1$ d'équation $y = 0$ et de la droite $D_2$ d'équation $x = -1$. Voir graphique à la fin.

**6)** • Soit $M(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_1$ puis $z = x$ l'affixe de $M$.

$$M \in (F) \Leftrightarrow |x+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3} \text{ ou } x = -1 - \sqrt{3}.$$

Les points d'intersection de $(F)$ et $\mathscr{D}_1$ sont les points $C\left(-1-\sqrt{3}, 0\right)$ et $D\left(-1+\sqrt{3}, 0\right)$.

• Soit $M(-1, y)$, $y \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}_2$ puis $z = iy$ l'affixe de $M$.

$$M \in (F) \Leftrightarrow |-1 + iy + 1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |iy| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |i| \times |y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |y| = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3}.$$

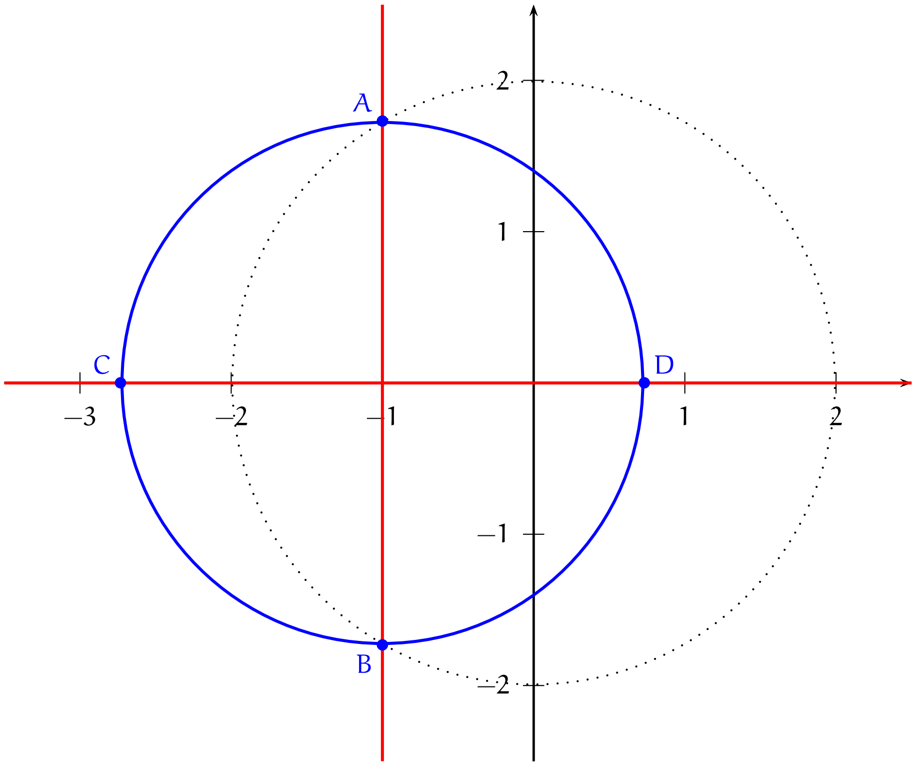
Les points d'intersection de $(F)$ et $\mathscr{D}_2$ sont les points $A\left(-1, \sqrt{3}\right)$ et $B\left(-1, -\sqrt{3}\right)$.

Finalement, les points d'intersection des ensembles $(E)$ et $(F)$ sont les points $A\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $B\left(-1, -\sqrt{3}\right)$, $C\left(-1-\sqrt{3}, 0\right)$ et $D\left(-1+\sqrt{3}, 0\right)$.

**Remarque.** On devait obtenir au moins les points $A$ et $B$ car par exemple, d'après 2),

$$f(z_A) = 5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(z_A) \in \mathbb{R} \\ f(z_A) - 8 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(z_A) \in \mathbb{R} \\ |f(z_A) - 8| = 3 \end{array}\right. \Rightarrow A \in (E) \cap (F).$$


A
B
C
D
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2