# BACCALAUREAT GENERAL

## MATHEMATIQUES

## Série S

## Enseignement de Spécialité

*Durée de l'épreuve : 4 heures*

*Coefficient : 9*



Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**EXERCICE 1 (6 points )**

**(Commun à tous les candidats)**

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que $9\ \%$ des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

- $96\ \%$ des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- $97\ \%$ des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- $N$ l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- $A$ l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

**Partie A**

**1)** Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.

**2)** Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est $0,876\,3$.

**3)** Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

**Partie B**

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ... ). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée $D$, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

**1)** On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de $\lambda$.

**2)** On prendra ici $\lambda = 0,173\,3$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

**Partie C**

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté $J$, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

**1)** Soit $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par $X$ ?

**2)** On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de $\sigma$ arrondie à l'entier le plus proche.

**EXERCICE 2 (6 points )**

**(commun à tous les candidats)**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

**1)** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

**2)** Déterminer la dérivée $f'$ de la fonction $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ dans un repère du plan. La droite $\Delta$ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

**Partie B**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**1)** Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\Delta$, les points $A_0,\ A_1$ et $A_2$ d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives $u_0,\ u_1$ et $u_2$.
Laisser les tracés explicatifs apparents.

**2)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n,\ u_n > 0$.

**3)** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**4) a)** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

**b)** On admet que la limite de la suite $(u_n)$ est solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$.

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

**Partie C**

On considère la suite $(S_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule $S_{100}$.

**EXERCICE 3 (3 points )**

**(commun à tous les candidats)**

On considère l'équation $(E_1)$ :

$$e^x - x^n = 0$$

où $x$ est un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.

**1)** Montrer que l'équation $(E_1)$ est équivalente à l'équation $(E_2)$ :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

**2)** Pour quelles valeurs de $n$ l'équation $(E_1)$ admet-elle deux solutions ?

**EXERCICE 4 (5 points )**

**(réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)**

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.
D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit $n$ un entier naturel. On note $x_n$ la quantité de fonds détenue par l'agence X, et $y_n$ la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1er janvier de l'année $2014 + n$, exprimées en millions d'euros.

On note $U_n$ la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On suppose que le 1er janvier de l'année 2014, l'agence X possède $50$ millions d'euros et l'agence Y possède $10$ millions d'euros.
L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = AU_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**1)** Interpréter dans le contexte de l'exercice le coefficient $0,6$ de la matrice $A$ et le coefficient $3$ de la matrice $B$.

**2)** Donner la matrice $U_0$ puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.

**3)** On note $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.

**a)** Donner sans détailler le calcul, la matrice $PDQ$.

**b)** Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel $QP$.
Dans la suite, on admettra que $QP = I$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul $n$, $A^n = PD^nQ$.

**4)** On pose pour tout entier naturel $n,\ V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$.

**a)** Démontrer que pour tout entier naturel $n,\ V_{n+1} = AV_n$.

**b)** Déterminer $V_0$ puis pour tout entier naturel $n$, donner l'expression de $V_n$ en fonction de $A$, $n$ et $V_0$.

**5)** Soit $n$ un entier naturel. On admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375\,(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5\,(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}.$$

**a)** Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice $V_n$ en détaillant les calculs.

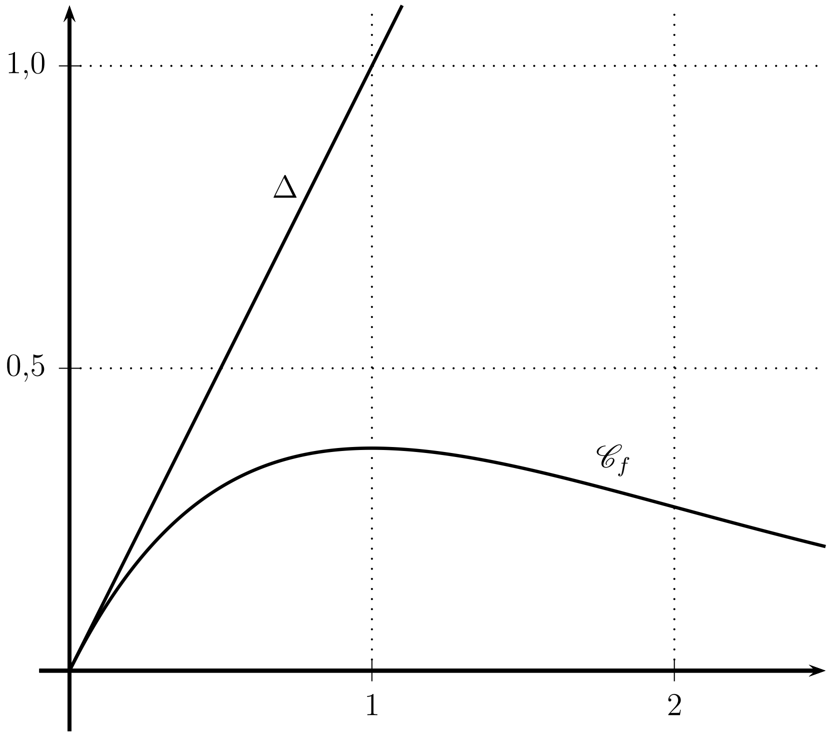
**b)** En déduire l'expression de $x_n$ en fonction de $n$.

**c)** Déterminer la limite de $x_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

**FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)**

**Annexe, Exercice 2**

**Partie B - Question 1**




**Partie C**

| | |
|---|---|
| **Déclaration des variables :** | $S$ et $u$ sont des nombres réels<br>$k$ est un nombre entier |
| **Initialisation :** | $u$ prend la valeur ……<br>$S$ prend la valeur …… |
| **Traitement :** | Pour $k$ variant de 1 à ….<br>    $u$ prend la valeur $u \times e^{-u}$<br>    $S$ prend la valeur ……<br>Fin Pour<br>Afficher …… |