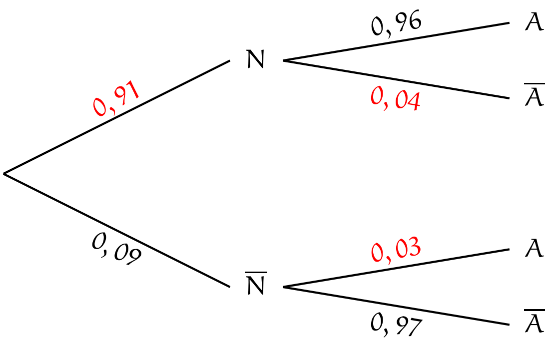
Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $P(A)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = P(N\cap A) + P\left(\overline{N}\cap A\right) = P(N)\times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right)\times P_{\overline{N}}(A) = (1-0,09)\times 0,96 + 0,09\times(1-0,97)$$
$$= 0,91\times 0,96 + 0,09\times 0,03 = 0,8736 + 0,0027 = 0,8763.$$

$$\boxed{P(A) = 0,876\,3.}$$

3) La probabilité demandée est $P_A(N)$.

$$P_A(N) = \frac{P(A\cap N)}{P(A)} = \frac{P(N)\times P_N(A)}{P(A)} = \frac{0,91\times 0,96}{0,8763} = 0,9969 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$\boxed{P_A(N) = 0,996\,9 \text{ arrondi au dix-millième.}}$$

Partie B

1) L'égalité $P(D \leqslant 0,4) = 0,5$ signifie que l'on a une chance sur deux que la durée de vie d'une peluche soit inférieure ou égale à 4 ans.

On sait que pour tout réel positif t,

$$P(D\leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$P(D\leqslant 4) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow -4\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.}$$

La calculatrice fournit $\lambda = 0,173\,28\ldots$

2) La probabilité demandée est $P_{D\geqslant 3}(D\geqslant 3+5)$.

$$P_{D\geqslant 3}(D\geqslant 8) = \frac{P((X\geqslant 3)\cap(X\geqslant 8))}{P(X\geqslant 3)} = \frac{P(X\geqslant 8)}{P(X\geqslant 3)} = \frac{1-\left(1-e^{-8\lambda}\right)}{1-\left(1-e^{-3\lambda}\right)} = \frac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}}$$
$$= e^{-8\lambda+3\lambda} = e^{-5\lambda} = e^{-5\times 0,1733} = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$\boxed{P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 8) = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}}$$

Partie C

1) On sait que X suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

2) $J \leqslant 385 \Leftrightarrow J - 358 \leqslant 27 \Leftrightarrow \dfrac{J-358}{\sigma} \leqslant \dfrac{27}{\sigma}$. La calculatrice fournit

$$P(J \leqslant 385) = 0,975 \Leftrightarrow P\left(X \leqslant \frac{27}{\sigma}\right) = 0,975 \Leftrightarrow \frac{27}{\sigma} = 1,9599\ldots \Leftrightarrow \sigma = 13,7\ldots$$

Donc

$$\boxed{\sigma = 14 \text{ arrondi à l'entier le plus proche.}}$$

EXERCICE 2

Partie A

1) En posant $X = -x$, on obtient d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{X\to-\infty} -Xe^{X} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

2) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

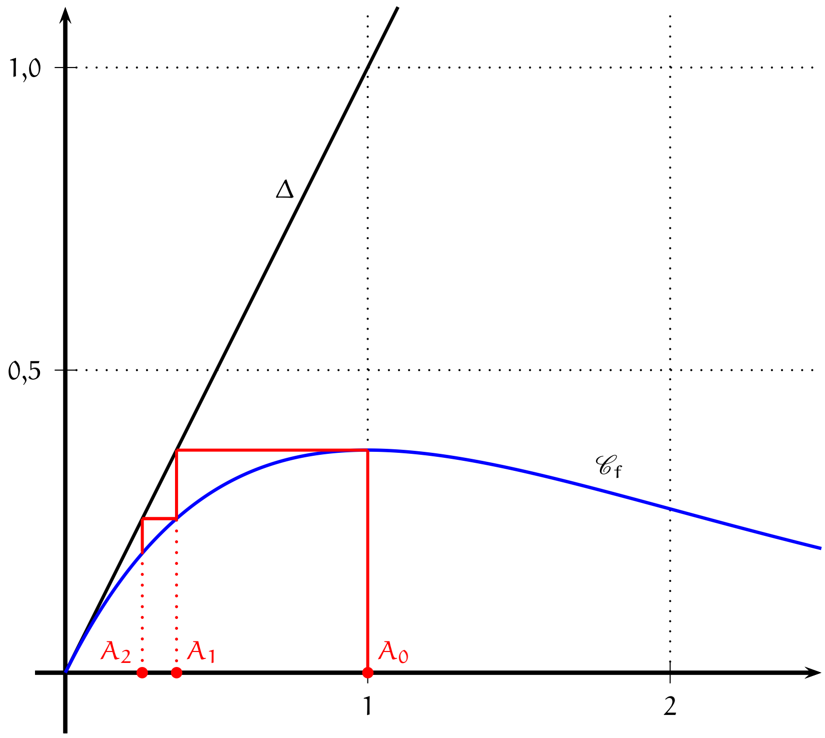
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x} > 0$. Donc, pour tout réel positif x, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Partie B

1) Représentation graphique de la suite (u_n).



2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

- $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.
  On a $u_n > 0$ et $e^{-u_n} > 0$. Puisque $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, on a donc $u_{n+1} > 0$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3) Soit n un entier naturel. Puisque $u_n \neq 0$, on peut écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$. Puisque $u_n > 0$, on a $-u_n < 0$ puis $e^{-u_n} < 1$ et finalement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Puisque $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} < u_n$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$ et donc que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4) a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite (u_n) est convergente. Posons $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

b) Soit x un réel positif.

$$xe^{-x} = x \Leftrightarrow x\left(e^{-x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Puisque pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell \geqslant 0$. Mais alors, d'après le résultat admis par l'énoncé, ℓ est un réel positif ou nul, solution de l'équation $xe^{-x} = x$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

Partie C

Algorithme complété.

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur 1 S prend la valeur u
Traitement :	Pour k variant de 1 à 100. u prend la valeur $u \times e^{-u}$ S prend la valeur $S + u$ Fin Pour Afficher S

EXERCICE 3

1) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x strictement positif,

$$e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow x = \ln\left(x^n\right) \Leftrightarrow x = n\ln(x) \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln(x)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

Donc, sur $]0, +\infty[$, l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Pour $x > 0$, posons $f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$.

• La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} = \frac{n-x}{nx} = -\frac{x-n}{nx}.$$

La fonction f_n' est strictement positive sur $]0, n[$ et strictement négative sur $]n, +\infty[$. On en déduit que la fonction f_n est strictement croissante sur $]0, n]$ et strcitement décroissante sur $[n, +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{n} = 0$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln(x) - \dfrac{x}{n}\right) = -\infty$.

• Pour tout réel $x > 0$,

$$f_n(x) = -\frac{x}{n} + \ln(x) = -\frac{x}{n}\left(1 - \frac{n}{x} \times \ln(x)\right) = -\frac{x}{n}\left(1 - n\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - n\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1 - n \times 0 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{n} = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

• $f_n(n) = \ln(n) - \dfrac{n}{n} = \ln(n) - 1$.

• On peut dresser le tableau de variation de la fonction f_n :

x	0				n			$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		0		$-$	
f	‖	$-\infty$	$\nearrow$		$\ln(n) - 1$		$\searrow$	$-\infty$

On note que la fonction f_n admet un maximum en n égal à $\ln(n) - 1$.

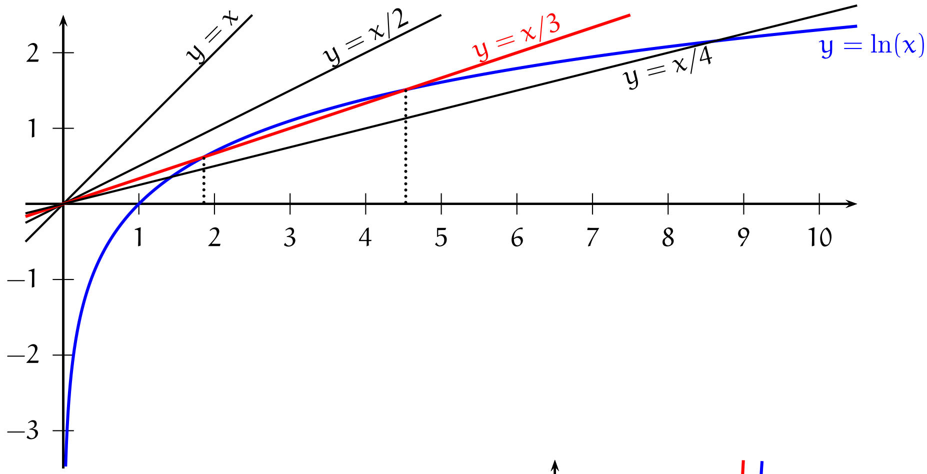
• $f_n(n) < 0 \Leftrightarrow \ln(n) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(n) < 1 \Leftrightarrow n < e$ et $f_n(n) > 0 \Leftrightarrow n > e$.

Puisque $e = 2,7\ldots$, si $n = 1$ ou $n = 2$, $f_n(n) < 0$ et si $n \geqslant 3$, $f_n(n) > 0$.

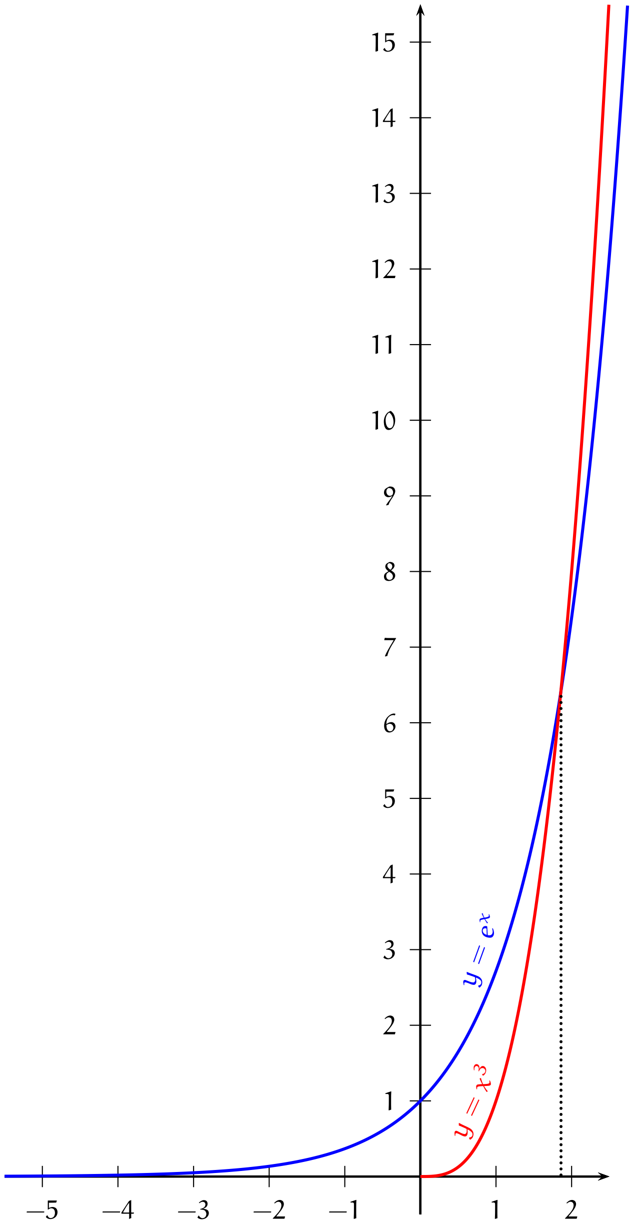
• Si $n = 1$ ou $n = 2$, la fonction f_n admet un maximum strictement négatif et en particulier, la fonction f_n ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Dans ce cas, l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.

Supposons dorénavant $n \geqslant 3$. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0, n]$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(n) > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0, n]$ et même $]0, n[$. De même, la fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]n, +\infty]$. De plus, $f_n(n) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$. La fonction f_n s'annule donc une et une seule fois sur l'intervalle $[n, +\infty[$ et même $]n, +\infty[$. Finalement, la fonction f_n s'annule exactement deux fois dans l'intervalle $]0, +\infty[$ ou encore l'équation (E_1) a exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

On a montré que les entiers naturels n pour lesquels l'équation (E_1) admet deux solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 3.



$y = x$
$y = x/2$
$y = x/3$
$y = x/4$
$y = \ln(x)$



$y = e^x$
$y = x^3$

EXERCICE 4

1) Soit n un entier naturel. Puisque $U_{n+1} = AU_n + B$, on a

$$x_{n+1} = 0,6x_n + 0,15y_n + 1 \text{ et } y_{n+1} = 0,2x_n + 0,4y_n + 3.$$

Le coefficient $0,6$ de la matrice A est la proportion des fonds de l'agence X qui restent à l'agence X d'une année sur l'autre : 60 % des fonds de l'agence X restent à l'agence X d'une année sur l'autre.

Le coefficient 3 de la matrice B est la somme que l'on rajoute chaque début d'année dans l'agence Y : chaque début d'année, on transfère 3 millions d'euros dans l'agence Y.

2) $x_0 = 50$ et $y_0 = 10$. Donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$.
Les quantité de fonds, exprimées en millions d'euros, détenues par les agences X et Y en 2015 sont respectivement x_1 et y_1.

$$\begin{aligned} U_1 = AU_0 + B &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6\times 50 + 0,15\times 10 + 1 \\ 0,2\times 50 + 0,4\times 10 + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32,5 \\ 17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En 2015, il y a $32,5$ millions d'euros dans l'agence X et 17 millions d'euros dans l'agence Y.

3) a)

$$\begin{aligned} PDQ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 2,1 \\ -0,6 & 1,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3\times 0,25 + 2,1\times 0,25 & -0,3\times 0,375 + 2,1\times 0,125 \\ -0,6\times 0,25 + 1,4\times 0,25 & (-0,6)\times(-0,375) + 1,4\times 0,125 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25\times 1 + 0,375\times 2 & 0,25\times 3 - 0,375\times 2 \\ 0,25\times 1 - 0,125\times 2 & 0,25\times 3 + 0,125\times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

4) a) Posons $V = \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} AV + B &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6\times 5 + 0,05\times 20 + 1 \\ 0,2\times 5 + 0,4\times \dfrac{20}{3} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 1 + 1 \\ 1 + \dfrac{8}{3} + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = V. \end{aligned}$$

Mais alors

$$V_{n+1} = U_{n+1} - V = (AU_n + B) - (AV + B) = A(U_n - V) = AV_n.$$

b) $V_0 = U_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10/3 \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

- $A^0 V_0 = IV_0 = V_0$. La formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $V_n = A^n V_0$ et montrons que $V_{n+1} = A^{n+1} V_0$.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= A \times V_n \\ &= A \times A^n V_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= A^{n+1} \times V_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

5) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
V_n = A^n V_0 &= \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375\,(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5\,(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ 10/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n) \times 45 + 0,375\,(-0,3^n + 0,7^n) \times \dfrac{10}{3} \\ \times. \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(0,25 \times 45 - \dfrac{10 \times 0,375}{3}\right) 0,3^n + \left(0,75 \times 45 + \dfrac{10 \times 0,375}{3}\right) 0,7^n \\ \times. \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n \\ \times. \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Soit n un entier naturel. Puisque $V_n = U_n - V$, on a $U_n = V + V_n$ et en particulier,

$$x_n = 5 + 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n.$$

c) Puisque $-1 < 0,3 < 1$ et $-1 < 0,7 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$. Mais alors

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 5.}$$

Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, la somme présente dans l'agence X se stabilisera autour de 5 millions d'euros.

