Session 2014

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1) La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A
est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $0,081$ **pour valeur de** λ**.**

2) a) Déterminer $P(X \geqslant 3)$.

b) Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$.

c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

Dans la suite de l'exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}**.**

3) L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égale à 1%. Afin de vérifier cette information, 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier.
On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) Proposition 1 : toute suite croissante tend vers $+\infty$.

2) g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.

Proposition 2 : Sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{e-1}{2}$.

Proposition 3 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1+\ln(4)$.

3) L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont les plans d'équations respectives $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$.

Proposition 4 : Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement.

EXERCICE 3 (5 points)

(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1) Donner la forme exponentielle du nombre $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c) Que dire de la longueur OA_n quand n tend vers $+\infty$?

3) On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n + 1$
	    R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

b) Pour $P = 0,01$, on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4) a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c) Compléter la figure donnée en annexe, **à rendre avec la copie**, représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

EXERCICE 4 (7 points)

(commun à tous les candidats)

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la dérivée de f.

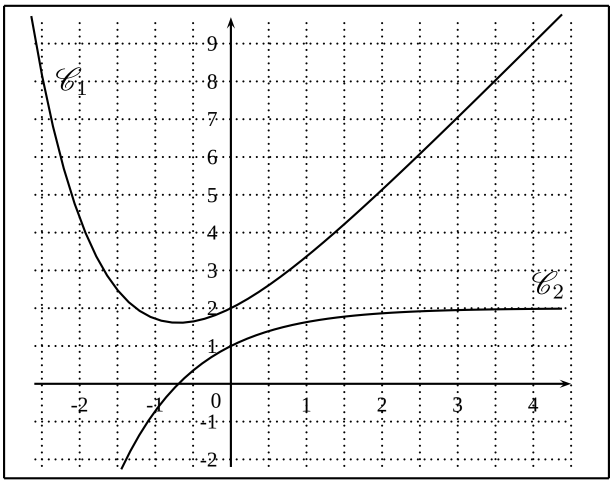
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.

Le point A de coordonnées $(0;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.

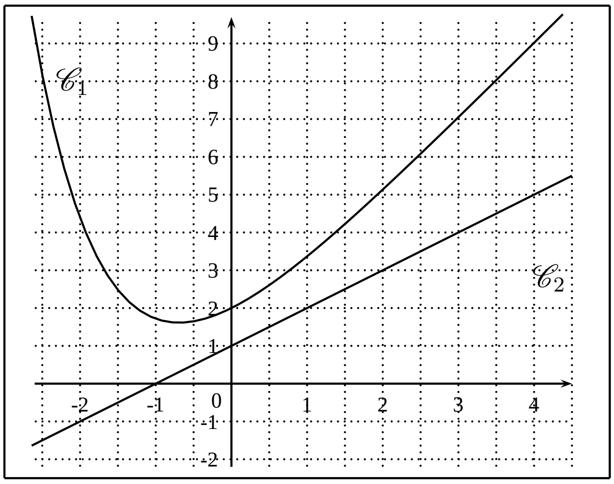
Le point B de coordonnées $(0;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1) Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

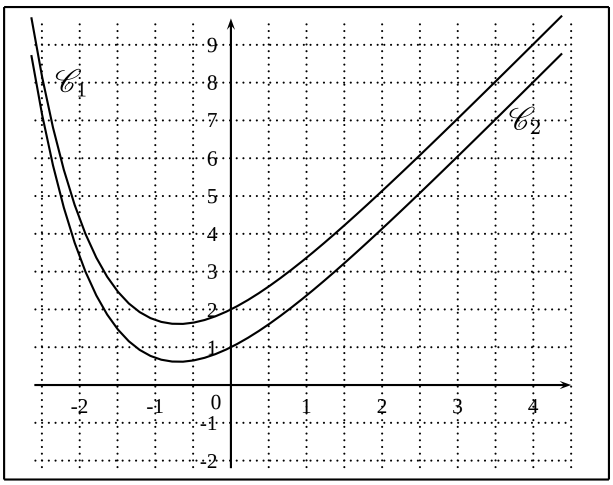
Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3



2) Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

3) On sait que pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux réels.

a) Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

b) Prouver que $a = 2$.

4) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1) a) Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

La figure ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

figure 2

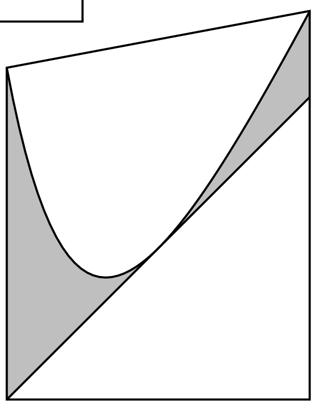
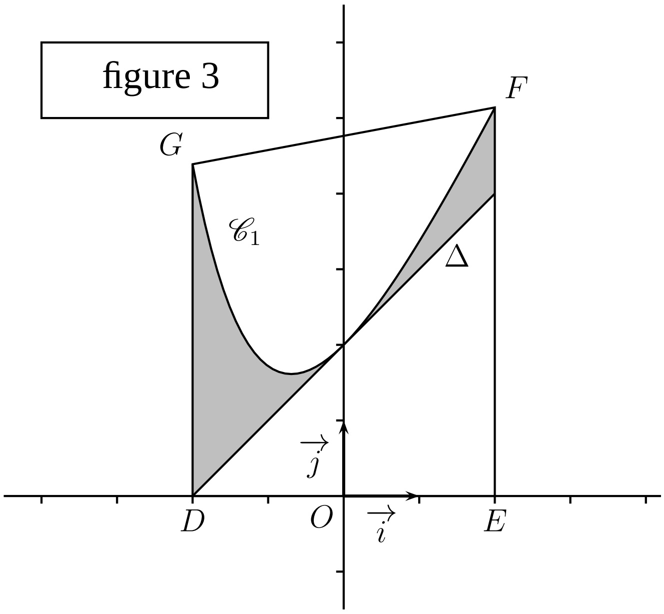


figure 3



Le contour du logo est représenté par le trapèze $DEFG$ où :

- D est le point de coordonnées $(-2; 0)$,

- E est le point de coordonnées $(2; 0)$,

- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_1$,

- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathscr{C}_1$,

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2) Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur
arrondie à 10^{-2} du résultat).

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe, Exercice 3