Pondichéry 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) Soit t un réel positif. On sait que

$$P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$P(X \geqslant t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) = 0,15 &\Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0,15 \Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0,85 \Leftrightarrow -2\lambda = \ln(0,85) \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\ln(0,85). \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{2}\ln(0,85) = 0,08 \text{ arrondi au centième.}}$$

2) a) $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 3) = e^{-0,081\times 3} = e^{-0,243}$.

$$\boxed{P(X \geqslant 3) = e^{-0,243} = 0,78 \text{ arrondi au centième.}}$$

b) Soient t et h deux réels positifs.

$$\begin{aligned} P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) &= \frac{P\left((X \geqslant t) \cap (X \geqslant t+h)\right)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P\left(X \geqslant t+h\right)}{P(X \geqslant t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda h + \lambda t} = e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geqslant h). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels positifs } t \text{ et } h,\ P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h).}$$

c) La probabilité demandée est $P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2)$. D'après la question précédente

$$P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2) = e^{-0,081\times 2} = e^{-0,162}.$$

$$\boxed{P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2) = e^{-0,162} = 0,85 \text{ arrondi au centième.}}$$

d) On sait que l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.
Ici, $E(X) = \frac{1}{0,081} = 12,35$ arrondi au centième.

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{0,081} = 12,35 \text{ arrondi au centième.}}$$

Ceci signifie qu'en moyenne, un moteur a une durée de vie d'environ 12 ans et quatre mois.

3) Ici $n = 800$. D'autre part, on suppose que $p = 0,01$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 8$ et $n(1-p) = 792$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation au seuil 95% associé est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,01 - 1,96\frac{\sqrt{0,01\times 0,99}}{\sqrt{800}}, 0,01 + 1,96\frac{\sqrt{0,01\times 0,99}}{\sqrt{800}}\right].$$

En arrondissant à 10^{-3} de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,003; 0,017]$.

La fréquence de moteurs défectueux dans l'échantillon est $f = \frac{15}{800} = 0,018\ldots$

f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc le résultat du test remet en question l'annonce de l'entreprise A au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 2

Proposition 1	**FAUX**
Proposition 2	**FAUX**
Proposition 3	**VRAI**
Proposition 4	**VRAI**

Justification 1 : Toute suite croissante et majorée converge. Par exemple, la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$.

La suite (u_n) est un exemple de suite croissante qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la proposition 1 est fausse.

Justification 2 : 0 est aussi solution de l'équation $2x = 2x\ln(2x+1)$. Donc la proposition 2 est fausse.

Justification 3 : Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Or, pour tout réel x de $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$,

$$g'(x) = 2\left(1 \times \ln(2x+1) + x \times \frac{2}{2x+1}\right) = 2\ln(2x+1) + \frac{4x}{2x+1}.$$

Par suite,

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right) + \frac{4 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + 1} = 2\ln 2 + 1 = \ln\left(2^2\right) + 1 = 1 + \ln(4).$$

Donc la proposition 3 est vraie.

Justification 4 : Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 3, -1)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{R}$ est le vecteur $\overrightarrow{n'}(1, 1, 5)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 2 \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 5 = 0.$$

Ainsi, des vecteurs normaux à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ respectivement sont orthogonaux et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement. La proposition 4 est vraie.

EXERCICE 3. Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) $\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puis

$$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}.$$

$$\boxed{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}.}$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right| = \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n.$$

Donc la suite r_n est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$r_n = r_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.}$$

c) Pour tout entier naturel n, $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. Puisque $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, on sait que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} OA_n = 0.}$$

3) a) Décrivons les différentes étapes.

- **Etape 1.** $R = 1$ et $n = 0$.
- **Etape 2.** On a $R > P$. Donc $n = 1$ et $R = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8\ldots$
- **Etape 3.** On a $R > P$. Donc $n = 2$ et $R = \frac{3}{4} = 0,75$
- **Etape 4.** On a $R > P$. Donc $n = 3$ et $R = \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0,6\ldots$
- **Etape 5.** On a $R > P$. Donc $n = 4$ et $R = \frac{9}{16} = 0,56\ldots$
- **Etape 6.** On a $R > P$. Donc $n = 5$ et $R = \frac{9\sqrt{3}}{32} = 0,4\ldots$.

On a maintenant $R \leqslant P$ et donc l'algorithme s'arrête et affiche 5.

$$\boxed{\text{L'algorithme affiche 5.}}$$

b) L'algorithme demande la précision P puis affiche la première valeur de n pour laquelle $r_n \leqslant P$.

4) a) Soit n un entier naturel.

- $OA_{n+1} = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$ et $OA_n = r_n$. Enfin,

$$A_{n+1}A_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n - z_n\right| = |z_n| \times \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-1\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right|r_n = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}\,r_n = \sqrt{\frac{4}{16}}r_n = \frac{1}{2}r_n.$$

Mais alors,

$$A_{n+1}O^2 + A_{n+1}A_n^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 r_n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_n^2 = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right) r_n^2 = r_n^2 = OA_n^2.$$

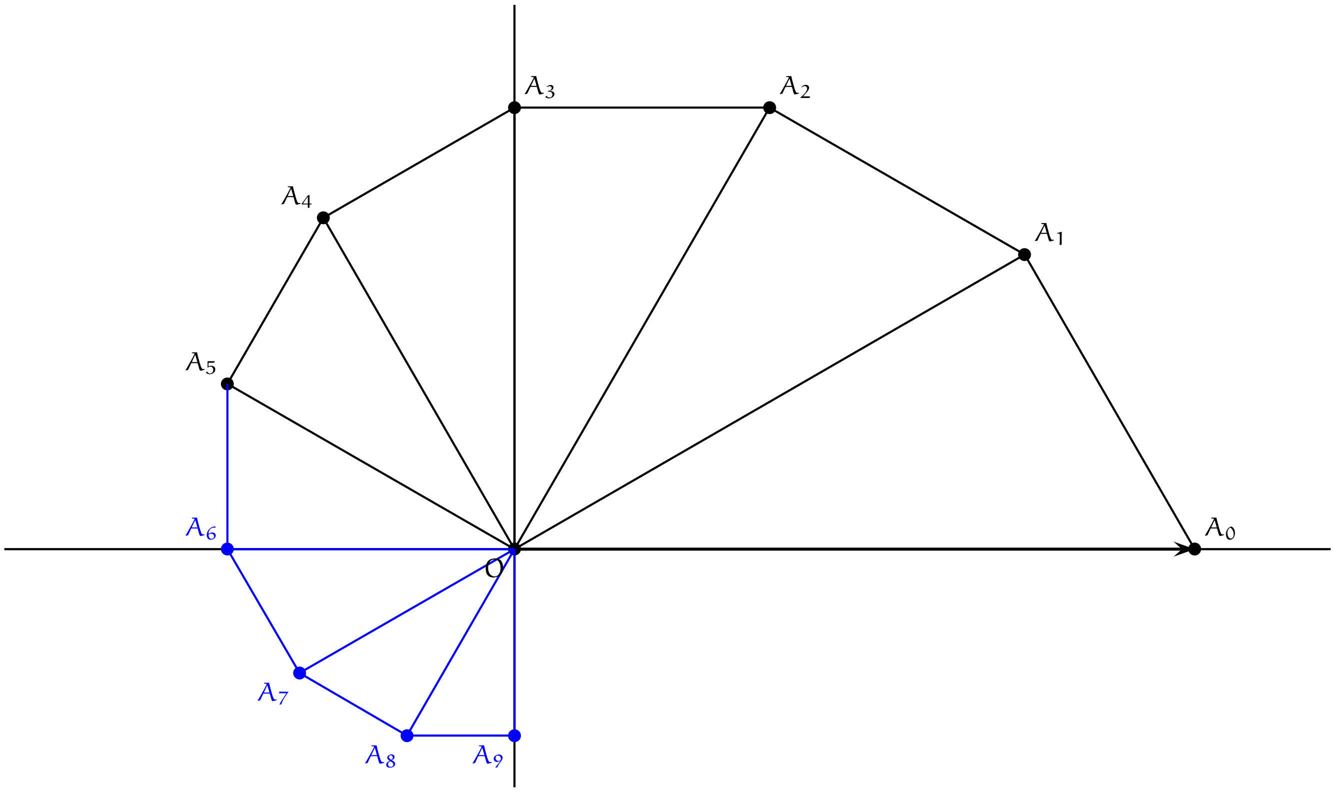
D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b) Soit n un entier naturel. Puisque $z_n = r_n e^{in\pi/6}$ et que $r_n > 0$, un argument de z_n est $n\frac{\pi}{6}$. Par suite

$$\begin{aligned} A_n \in (Oy) &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } n = 3 + 6k \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier naturel } k \text{ tel que } n = 3 + 6k \text{ (car } n \text{ est un entier naturel).} \end{aligned}$$

Les entiers naturels n pour lesquels A_n est un point de l'axe des ordonnées sont les entiers naturels de la forme $3+6k$, $k \in \mathbb{N}$. Ce sont les entiers 3, 9, 15, 21 ...

c) Figure.



EXERCICE 4.

Partie A

1) La fonction f est décroissante sur $[-2,5;x_0]$ et croissante sur $[x_0;4,5]$ où x_0 est environ égal à $-0,5$. La fonction f' doit être négative sur $[-2,5;x_0]$ et positive sur $[x_0;4,5]$ ou encore la courbe $\mathscr{C}_2$ doit être au-dessous de l'axe des abscisses sur $[-2,5;x_0]$ et au-dessus de l'axe des abscisses sur $[x_0;4,5]$. Seule la courbe $\mathscr{C}_2$ de la situation 1 peut donc convenir.

2) Le point A de coordonnées $(0,2)$ est un point de la courbe représentative de f. Donc $f(0) = 2$.
D'autre part, le point B de coordonnées $(0,1)$ est un point de la courbe représentative de f'. Donc $f'(0) = 1$.

L'équation réduite de la droite Δ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ou encore $y = x+2$.

$$\boxed{\text{L'équation réduite de la droite } \Delta \text{ est } y = x+2.}$$

3) a) L'égalité $f(0) = 2$ fournit $e^0 + b = 2$ et donc $b = 1$.

b) Pour tout réel x, $f'(x) = -e^{-x} + a$. L'égalité $f'(0) = 1$ fournit $-1 + a = 1$ et donc $a = 2$. On a montré que

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = e^{-x} + 2x + 1.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = -e^{-x} + 2.$$

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -e^{-x} + 2 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 2 \\ &\Leftrightarrow -x < \ln(2) \text{ (par stricte croissance de la fonction logarithme népérien sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow x > -\ln(2). \end{aligned}$$

De même, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln(2)$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty,-\ln(2)]$ et stritement croissante sur $[\ln(2),+\infty[$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

Partie B

1) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} + 2 - 1 = -e^{-x} + 1.$$

Si $x > 0$, alors $-x < 0$ puis $e^{-x} < 1$ et donc $-e^{-x} + 1 > 0$. Si $x < 0$, alors $-x > 0$ puis $e^{-x} > 1$ et donc $-e^{-x} + 1 < 0$. Ainsi, la fonction g' est strictement négative sur $]-\infty,0[$ et stritement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g est stritement décroissante sur $]-\infty,0]$ et stritement croissante sur $[0,+\infty[$.

On en déduit que la fonction g admet un minimum en $x = 0$. Ce minimum est égal à $g(0)$ avec $g(0) = f(0) - 2 = 0$.

b) Par suite, la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$. Puisque pour tout réel x, $g(x) = f(x) - (x+2)$, on en déduit que pour tout réel x, $f(x) \geqslant x+2$ et donc que la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$.

2) Notons $\mathscr{A}$ l'aire demandée. Les fonctions $f\ :\ x \mapsto e^{-x} + 2x + 1$ et $h\ :\ x \mapsto x+2$ sont continues sur $[-2,2]$ et de plus, d'après la question précédente, pour tout réel x de $[-2,2]$, $f(x) \geqslant h(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_{-2}^{2} (f(x) - h(x))\,dx = \int_{-2}^{2} (e^{-x} + 2x + 1 - x - 2)\,dx = \int_{-2}^{2} (e^{-x} + x - 1)\,dx \\ &= \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-2}^{2} = \left(-e^{-2} + \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(-e^{2} + \frac{(-2)^2}{2} + 2\right) \\ &= e^2 - e^{-2} - 4. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = e^2 - e^{-2} - 4 = 3,25 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

