Polynésie 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $(1, 0, 2)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD}$ sont $(7, 5, -1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont $(6, 5, -3)$.

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 6 + 0 \times 5 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Donc le triangle BCD est rectangle en C. De plus $BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $CD = \sqrt{6^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{70}$. Puisque $BC \neq CD$, le triangle BCD n'est pas isocèle en C.

Puisque le triangle BCD est rectangle en C, son aire est

$$\frac{BC \times CD}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{70}}{2} = \frac{\sqrt{350}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'aire du triangle } BCD \text{ est égale à } \frac{5\sqrt{14}}{2}.}$$

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires (dans le cas contraire, il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{BC}$ et en particulier tel que $0 \times k = 5$ (en analysant la deuxième coordonnée) ce qui est impossible). Donc les points B, C et D définissent un unique plan.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BC} = (-2) \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{CD} = (-2) \times 6 + 3 \times 5 + 1 \times (-3) = -12 + 15 - 3 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan BCD. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b) Le plan BCD est le plan passant par $B(-1, 1, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-2, 3, 1)$. Une équation cartésienne du plan BCD est donc

$$-2(x - (-1)) + 3(y - 1) + (z - 0) = 0,$$

ou encore une équation cartésienne du plan BCD est $-2x + 3y + z = 5$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (BCD) \text{ est } -2x + 3y + z = 5.}$$

3) La droite $\mathscr{D}$ est la droite passant par $A(5, -5, 2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(-2, 3, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \end{array}\right. , \; t \in \mathbb{R}.$$

4) Soit $M(5 - 2t, -5 + 3t, 2 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$.

$$M \in (BCD) \Leftrightarrow -2(5 - 2t) + 3(-5 + 3t) + (2 + t) = 5 \Leftrightarrow 14t = 28 \Leftrightarrow t = 2.$$

Quand $t = 2$, on obtient les coordonnées du point H : $(1, 1, 4)$.

$$\boxed{\text{Le point } H \text{ a pour coordonnées } (1, 1, 4).}$$

5) Le point H est le projeté orthogonal du point A sur le plan BCD.

$$AH = \sqrt{(1 - 5)^2 + (1 - (-5))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

Par suite, le volume du tétraèdre $ABCD$ est

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times AH \times \text{aire de}(BCD) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{14} \times \frac{5\sqrt{14}}{2} = \frac{1}{3} \times 5 \times 14 = \frac{70}{3}.$$

$$\boxed{\text{Le volume du tétraèdre } ABCD \text{ est égal à } \frac{70}{3}.}$$

6) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-6, 6, -2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-5, 6, 0)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-6) \times (-5) + 6 \times 6 + (-2) \times 0 = 66.$$

Par suite,

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{66}{\sqrt{76} \times \sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}}.$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{\widehat{BAC} = 14,2^\circ \text{ au dixième de degré près.}}$$

EXERCICE 2

1) $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 6$.

$$\boxed{u_1 = 2 \text{ et } u_2 = 6.}$$

2) A la première étape, l'algorithme 1 calcule $0 + 2 \times 1 + 2$ qui n'est pas u_1 et l'algorithme 2 calcule $0 + 2 \times 0 + 1$ qui est u_1. Le bon algorithme est l'algorithme 2.

3) a) Il semble que la suite (u_n) soit strictement croissante.

Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = 2n + 2$. Puisque n est un entier naturel, $2n + 2 > 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n > 0$ ou enfin $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$ et donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) L'égalité $u_0 = 0$ fournit $c = 0$. Ensuite,

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 2 \\ u_2 = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 2 - a \\ 2a + (2 - a) = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

Donc si la conjecture est exacte, alors pour tout entier naturel n

$$u_n = n^2 + n = n(n + 1).$$

4) a) On a vu que pour tout entier naturel n, $v_n = 2n + 2$. Mais alors, pour tout entier naturel n

$$v_{n+1} - v_n = (2(n + 1) + 2) - (2n + 2) = 2.$$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

b) Soit n un entier naturel.

1ère solution. (si on connaît une formule générale)

$$S_n = \frac{(v_0 + v_n) \times (n + 1)}{2} = \frac{(2 + 2n + 2) \times (n + 1)}{2} = \frac{(2n + 4) \times (n + 1)}{2} = (n + 2)(n + 1).$$

2ème solution. (si on ne connaît qu'une formule)

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \times 0 + 2 + 2 \times 1 + 2 + \ldots + (2 \times n + 2) = 2(0 + 1 + \ldots + n) + (\underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{n+1}) \\ &= 2 \times \frac{n(n + 1)}{2} + 2(n + 1) = n(n + 1) + 2(n + 1) = (n + 2)(n + 1). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ S_n = (n + 1)(n + 2).}$$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$.

- $S_0 = v_0 = u_1 - u_0$. Donc la formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $S_n = u_{n+1} - u_0$ et montrons que $S_{n+1} = u_{n+2} - u_0$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= v_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1} = S_n + v_{n+1} = S_n + u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - u_0 + u_{n+2} - u_{n+1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+2} - u_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$. On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = S_n = (n + 1)(n + 2)$ ou encore, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = ((n - 1) + 1)((n - 1) + 2) = n(n + 1).$$

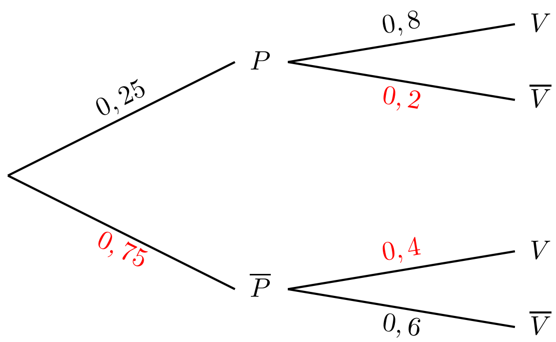
Enfin, $0 \times (0 + 1) = 0 = u_0$ et donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = n(n + 1).}$$

EXERCICE 3

Affirmation 1	**VRAI**
Affirmation 2	**VRAI**
Affirmation 3	**FAUX**
Affirmation 4	**FAUX**
Affirmation 5	**VRAI**

Justification 1. Notons P l'événement « il pleut » et V l'événement « Zoé se rend à son travail en voiture ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $p(V)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(V) &= p(P\cap V) + p\left(\overline{P}\cap V\right) = p(P)\times p_P(V) + p\left(\overline{P}\right)\times p_{\overline{P}}(V) \\ &= 0,25\times 0,8 + (1-0,25)\times(1-0,6) = 0,2+0,3 = 0,5. \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. Supposons que les événements A et B soient indépendants. On a donc $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(A) = p\left(A\cap B\right) + p\left(A\cap\overline{B}\right)$ et donc

$$p\left(A\cap\overline{B}\right) = p(A) - p\left(A\cap B\right) = p(A) - p(A)\times p(B) = p(A)\times(1-p(B)) = p(A)\times p\left(\overline{B}\right).$$

Par suite, les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants. L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. On sait que pour tout réel t,

$$p(T\leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^{0}\right) = 1-e^{-\lambda t},$$

et donc aussi $p(T\geqslant t) = 1 - p(X\leqslant t) = 1-\left(1-e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$. La probabilité demandée est $p(T\geqslant 5)$. La calculatrice fournit

$$p(X\geqslant 5) = e^{-0,7\times 5} = e^{-3,5} = 0,03\ldots$$

L'affirmation 3 est fausse.

Justification 4. On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$ avec $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,7} = 1,42\ldots$. Donc le temps d'attente moyen est environ $1,4$ minute. L'affirmation 4 est fausse.

Justification 5. Ici $n = 183$ et on suppose que $p = 0,39$. On note que $np = 71,37$ et donc $np\geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 111,63$ et donc $n(1-p)\geqslant 5$. L'intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,39-1,96\frac{\sqrt{0,39\times 0,61}}{\sqrt{183}}, 0,39+1,96\frac{\sqrt{0,39\times 0,61}}{\sqrt{183}}\right]$$

En arrondissant demanière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,31;0,47]$.
La fréquence observée est $f = 0,34$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A$^+$ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. L'affirmation 5 est vraie.

EXERCICE 4

1) $f(0) = e^0 = 1$ et $g(0) = 2e^0 - 1 = 2 - 1 = 1$. Donc le point $A(0, 1)$ appartient aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A est $f'(0)$. Or, pour tout réel x, $f'(x) = e^x$ et donc $f'(0) = 1$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en A admet pour équation cartésienne $y = 1 \times (x - 0) + 1$ ou encore $y = x + 1$.

De même, pour tout réel x,

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{\frac{x}{2}} + 0 = e^{\frac{x}{2}},$$

et en particulier, $g'(0) = 1$. La tangente à $\mathscr{C}_g$ en A admet également pour équation cartésienne $y = x + 1$.

On a montré que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont en commun leur point d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente à savoir la droite Δ d'équation $y = x + 1$.

2) a) En posant $X = \dfrac{x}{2}$, on obtient

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$$

et donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 2e^{\frac{x}{2}} = 0$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (-x - 2) = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty.}$$

b) Soit x un réel non nul.

$$h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 = x\left(\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{x} - \frac{x}{x} - \frac{2}{x}\right) = x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right).$$

D'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty.$$

D'autre part, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(-1 - \frac{2}{x}\right) = -1$. En additionnant, on obtient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$.
Enfin, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et en multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty.}$$

c) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{\frac{x}{2}} - 1 = e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

Si $x > 0$, alors $\dfrac{x}{2} > 0$ puis $e^{\frac{x}{2}} > 1$ et donc $h'(x) > 0$ et si $x < 0$, alors $\dfrac{x}{2} < 0$ puis $e^{\frac{x}{2}} < 1$ et donc $h'(x) < 0$. Enfin, $h'(0) = 0$.

En résumé, la fonction h' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

d) En tenant compte de $h(0) = 2e^0 - 2 = 0$, on en déduit le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) La fonction h admet un minimum en 0 égal à 0. On en déduit que pour tout réel x, on a $h(x) \geqslant 0$. Par suite, pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geqslant 0$ ce qui s'écrit encore $2e^{\frac{x}{2}} - 1 - (x + 1) \geqslant 0$ ou enfin $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1.}$$

f) On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$.

3) Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

a) Soit x un réel.

$$\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2 \times e^{\frac{x}{2}} + 1 = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1.$$

b) Soit x un réel.

$$f(x) - g(x) = e^x - \left(2 \times e^{\frac{x}{2}} - 1\right) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1 = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2.$$

Pour tout réel x non nul, $e^{\frac{x}{2}} \neq 1$ et donc $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 > 0$. D'autre part, on sait que $f(0) = g(0)$.

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont en commun leur point d'abscisse 0.

4) Puisque les fonction f et g sont continues sur $[0, 1]$ et que pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) \geqslant g(x)$, l'aire demandée est

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 \left(e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1\right) dx = \left[e^x - 2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + x\right]_0^1 \\ &= \left(e^1 - 4e^{\frac{1}{2}} + 1\right) - \left(e^0 - 4e^0 + 0\right) = e - 4e^{\frac{1}{2}} + 4.\end{aligned}$$

L'aire demandée est égale à $e - 4e^{\frac{1}{2}} + 4$ ou encore $0,12$ à 10^{-2} près par défaut.