

# Polynésie 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

## EXERCICE 1

1) Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{BC}$  sont  $(1, 0, 2)$ , les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{BD}$  sont  $(7, 5, -1)$  et les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{CD}$  sont  $(6, 5, -3)$ .

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \times 6 + 0 \times 5 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Donc le triangle  $BCD$  est rectangle en  $C$ . De plus  $BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$  et  $CD = \sqrt{6^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{70}$ . Puisque  $BC \neq CD$ , le triangle  $BCD$  n'est pas isocèle en  $C$ .

Puisque le triangle  $BCD$  est rectangle en  $C$ , son aire est

$$\frac{BC \times CD}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{70}}{2} = \frac{\sqrt{350}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}.$$

L'aire du triangle  $BCD$  est égale à  $\frac{5\sqrt{14}}{2}$ .

2) a) Les vecteurs  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ne sont pas colinéaires (dans le cas contraire, il existerait un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{BC}$  et en particulier tel que  $0 \times k = 5$  (en analysant la deuxième coordonnée) ce qui est impossible). Donc les points  $B$ ,  $C$  et  $D$  définissent un unique plan.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2) \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = (-2) \times 6 + 3 \times 5 + 1 \times (-3) = -12 + 15 - 3 = 0.$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $BCD$ . On en déduit que le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan  $(BCD)$ .

b) Le plan  $BCD$  est le plan passant par  $B(-1, 1, 0)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(-2, 3, 1)$ . Une équation cartésienne du plan  $BCD$  est donc

$$-2(x - (-1)) + 3(y - 1) + (z - 0) = 0,$$

ou encore une équation cartésienne du plan  $BCD$  est  $-2x + 3y + z = 5$ .

Une équation cartésienne du plan  $(BCD)$  est  $-2x + 3y + z = 5$ .

3) La droite  $\mathcal{D}$  est la droite passant par  $A(5, -5, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{n}(-2, 3, 1)$ . Une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  est donc

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4) Soit  $M(5 - 2t, -5 + 3t, 2 + t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de la droite  $\mathcal{D}$ .

$$M \in (BCD) \Leftrightarrow -2(5 - 2t) + 3(-5 + 3t) + (2 + t) = 5 \Leftrightarrow 14t = 28 \Leftrightarrow t = 2.$$

Quand  $t = 2$ , on obtient les coordonnées du point  $H : (1, 1, 4)$ .

Le point  $H$  a pour coordonnées  $(1, 1, 4)$ .

5) Le point  $H$  est le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $BCD$ .

$$AH = \sqrt{(1 - 5)^2 + (1 - (-5))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

Par suite, le volume du tétraèdre  $ABCD$  est

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times AH \times \text{aire de}(BCD) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{14} \times \frac{5\sqrt{14}}{2} = \frac{1}{3} \times 5 \times 14 = \frac{70}{3}.$$

Le volume du tétraèdre  $ABCD$  est égal à  $\frac{70}{3}$ .

6) Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont  $(-6, 6, -2)$  et les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AC}$  sont  $(-5, 6, 0)$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-6) \times (-5) + 6 \times 6 + (-2) \times 0 = 66.$$

Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{66}{\sqrt{76} \times \sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}}.$$

La calculatrice fournit

$$\widehat{BAC} = 14,2^\circ \text{ au dixième de degré près.}$$

## EXERCICE 2

### Partie A

1) Le 1<sup>er</sup> août correspond au numéro de jour  $j = 1$  et au numéro de mois  $m = 8$ .

$$j \times 12 + m \times 37 = 1 \times 12 + 8 \times 37 = 12 + 296 = 308.$$

2) a) De manière générale  $z = 12j + 37m$ . Or,  $12 \equiv 0 [12]$  et  $37 \equiv 1 [12]$  car  $37 = 2 \times 36 + 1$ . Par suite,  $z \equiv 0 \times j + 1 \times m [12]$  ou encore  $z \equiv m [12]$ .

b)  $474 = 39 \times 12 + 6$  et donc  $474 \equiv 6 [12]$ . Mais alors  $m \equiv 6 [12]$  ce qui ne laisse que la possibilité  $m = 6$ . Le spectateur est né au mois de juin. Ensuite,

$$j = \frac{z - 37 \times m}{12} = \frac{474 - 37 \times 6}{12} = 21$$

et donc

un spectateur ayant obtenu le nombre 474 avec le programme (A) est né le 21 juin.

### Partie B

1) Première méthode. Algorithme modifié.

<b>Variables :</b>	$j$ et $m$ sont des entiers naturels
<b>Traitement :</b>	Pour $m$ allant de 1 à 12 faire : Pour $j$ allant de 1 à 31 faire : $z$ prend la valeur $12j + 31m$ Si $z = 503$ Afficher $z$ Fin si Fin Pour Fin Pour

2) Deuxième méthode.

a)  $z = 12j + 31m$ . Modulo 12, 31 est congru à 7 car  $31 = 2 \times 12 + 7$ . Donc  $z \equiv 0 \times j + 7 \times m [12]$  ou encore  $z \equiv 7m [12]$  ou enfin  $7m$  et  $z$  ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

- b) • Si  $m = 1$ ,  $7m = 7$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 7.  
• Si  $m = 2$ ,  $7m = 14$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 2.  
• Si  $m = 3$ ,  $7m = 21$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 9.  
• Si  $m = 4$ ,  $7m = 28$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 4.  
• Si  $m = 5$ ,  $7m = 35$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 11.  
• Si  $m = 6$ ,  $7m = 42$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 6.  
• Si  $m = 7$ ,  $7m = 49$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 1.  
• Si  $m = 8$ ,  $7m = 56$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 8.  
• Si  $m = 9$ ,  $7m = 63$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 3.  
• Si  $m = 10$ ,  $7m = 70$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 10.  
• Si  $m = 11$ ,  $7m = 77$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 5.  
• Si  $m = 12$ ,  $7m = 84$  et donc le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 est 0.

c)  $503 = 12 \times 41 + 11$  et donc le reste de la division euclidienne de 503 par 12 est 11. D'après la question a), ce reste est le même que le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12. D'après la question b), on a  $m = 5$ . Le spectateur est donc né au mois de mai. Ensuite,

$$j = \frac{z - 31m}{12} = \frac{503 - 31 \times 5}{12} = 29.$$

Un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme (B) est né le 29 mai.

### 3) Troisième méthode.

a)  $12 \times (-2) + 31 \times 17 = -24 + 527 = 503$ . Donc le couple  $(-2 ; 17)$  est solution de l'équation  $12x + 31y = 503$ .

b) Soit  $(x, y)$  un couple d'entiers relatifs solution de l'équation  $12x + 31y = 503$ , alors  $12x + 31y = 12 \times (-2) + 31 \times 17$  puis  $12x + 12 \times 2 = 31 \times 17 - 31y$  et finalement  $12(x + 2) = 31(17 - y)$ .

c) Soit  $(x, y)$  un couple d'entiers relatifs solution de l'équation  $12x + 31y = 503$ . D'après la question précédente, 12 divise  $31(17 - y)$ . De plus, les entiers  $12 = 2^2 \times 3$  et 31 (qui est premier) sont premiers entre eux car sans facteur premier commun. Le théorème de GAUSS permet d'affirmer que 12 divise  $17 - y$ . Par suite, il existe un entier relatif  $k$  tel que  $17 - y = 12k$  ou encore  $y = 17 - 12k$ .

De même, 31 divise  $x + 2$  et donc il existe un entier relatif  $k'$  tel que  $x + 2 = 31k'$  ou encore  $x = -2 + 31k'$ .

Réciproquement, soient  $k$  et  $k'$  deux entiers relatifs puis  $x = -2 + 31k'$  et  $y = 17 - 12k$ .

$$12x + 31y = 503 \Leftrightarrow 12(-2 + 31k') + 31(17 - 12k) = 503 \Leftrightarrow 12 \times 31 \times (k - k') + 503 = 503 \Leftrightarrow k = k'.$$

Les couples d'entiers relatifs  $(x ; y)$ , solutions de l'équation  $12x + 31y = 503$  sont les couples de la forme  $(-2 + 31k, 17 - 12k)$  où  $k$  est un entier relatif.

d) Soient  $k$  un entier relatif puis  $y = 17 - 12k$ .

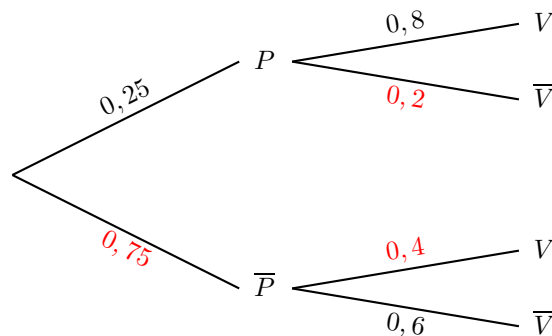
$$1 \leq y \leq 12 \Leftrightarrow 1 \leq 17 - 12k \leq 12 \Leftrightarrow -16 \leq -12k \leq -5 \Leftrightarrow \frac{5}{12} \leq k \leq \frac{16}{12} \Leftrightarrow k = 1.$$

Pour  $k = 1$ , on obtient  $y = 5$  et  $x = 29$  ce qui refournit la date du 29 mai.

**EXERCICE 3**

<b>Affirmation 1</b>	<b>VRAI</b>
<b>Affirmation 2</b>	<b>VRAI</b>
<b>Affirmation 3</b>	<b>FAUX</b>
<b>Affirmation 4</b>	<b>FAUX</b>
<b>Affirmation 5</b>	<b>VRAI</b>

**Justification 1.** Notons  $P$  l'événement « il pleut » et  $V$  l'événement « Zoé se rend à son travail en voiture ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est  $p(V)$ . D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 p(V) &= p(P \cap V) + p(\bar{P} \cap V) = p(P) \times p_P(V) + p(\bar{P}) \times p_{\bar{P}}(V) \\
 &= 0,25 \times 0,8 + (1 - 0,25) \times (1 - 0,6) = 0,2 + 0,3 = 0,5.
 \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est vraie.

**Justification 2.** Supposons que les événements  $A$  et  $B$  soient indépendants. On a donc  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ . D'après la formule des probabilités totales,  $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$  et donc

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A) \times (1 - p(B)) = p(A) \times p(\bar{B}).$$

Par suite, les événements  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants. L'affirmation 2 est vraie.

**Justification 3.** On sait que pour tout réel  $t$ ,

$$p(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = (-e^{-\lambda t}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi  $p(T \geq t) = 1 - p(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$ . La probabilité demandée est  $p(T \geq 5)$ . La calculatrice fournit

$$p(X \geq 5) = e^{-0,7 \times 5} = e^{-3,5} = 0,03 \dots$$

L'affirmation 3 est fausse.

**Justification 4.** On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est  $\frac{1}{\lambda}$  avec  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,7} = 1,42 \dots$ . Donc le temps d'attente moyen est environ 1,4 minute. L'affirmation 4 est fausse.

**Justification 5.** Ici  $n = 183$  et on suppose que  $p = 0,39$ . On note que  $np = 71,37$  et donc  $np \geq 5$  et aussi  $n(1 - p) = 111,63$  et donc  $n(1 - p) \geq 5$ . L'intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,39 - 1,96 \frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}}, 0,39 + 1,96 \frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}} \right]$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle  $[0,31; 0,47]$ .

La fréquence observée est  $f = 0,34$ . Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A<sup>+</sup> parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. L'affirmation 5 est vraie.

**EXERCICE 4**

1)  $f(0) = e^0 = 1$  et  $g(0) = 2e^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ . Donc le point  $A(0, 1)$  appartient aux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $A$  est  $f'(0)$ . Or, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = e^x$  et donc  $f'(0) = 1$ . La tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $A$  admet pour équation cartésienne  $y = 1 \times (x - 0) + 1$  ou encore  $y = x + 1$ .

De même, pour tout réel  $x$ ,

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{\frac{x}{2}} + 0 = e^{\frac{x}{2}},$$

et en particulier,  $g'(0) = 1$ . La tangente à  $\mathcal{C}_g$  en  $A$  admet également pour équation cartésienne  $y = x + 1$ .

On a montré que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont en commun leur point d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente à savoir la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 1$ .

2) a) En posant  $X = \frac{x}{2}$ , on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{\frac{x}{2}} = 0$ . D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 2) = +\infty$ . En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty.$$

b) Soit  $x$  un réel non nul.

$$h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 = x \left( \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{x} - \frac{x}{x} - \frac{2}{x} \right) = x \left( \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right).$$

D'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty.$$

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 - \frac{2}{x} \right) = -1$ . En additionnant, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty$ .

Enfin,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et en multipliant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

c)  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{\frac{x}{2}} - 1 = e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

Si  $x > 0$ , alors  $\frac{x}{2} > 0$  puis  $e^{\frac{x}{2}} > 1$  et donc  $h'(x) > 0$  et si  $x < 0$ , alors  $\frac{x}{2} < 0$  puis  $e^{\frac{x}{2}} < 1$  et donc  $h'(x) < 0$ . Enfin,  $h'(0) = 0$ .

En résumé, la fonction  $h'$  est strictement négative sur  $] -\infty, 0[$ , strictement positive sur  $]0, +\infty[$  et s'annule en 0.

d) En tenant compte de  $h(0) = 2e^0 - 2 = 0$ , on en déduit le tableau de variations de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

e) La fonction  $h$  admet un minimum en 0 égal à 0. On en déduit que pour tout réel  $x$ , on a  $h(x) \geq 0$ . Par suite, pour tout réel  $x$ ,  $2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geq 0$  ce qui s'écrit encore  $2e^{\frac{x}{2}} - 1 - (x + 1) \geq 0$  ou enfin  $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$ .

$$\text{Pour tout réel } x, 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1.$$

f) On en déduit que la courbe  $\mathcal{C}_g$  est au-dessus de la droite  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 3) Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ .

a) Soit  $x$  un réel.

$$(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = (e^{\frac{x}{2}})^2 - 2 \times e^{\frac{x}{2}} + 1 = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1.$$

b) Soit  $x$  un réel.

$$f(x) - g(x) = e^x - (2 \times e^{\frac{x}{2}} - 1) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1 = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2.$$

Pour tout réel  $x$  non nul,  $e^{\frac{x}{2}} \neq 1$  et donc  $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 > 0$ . D'autre part, on sait que  $f(0) = g(0)$ .

On en déduit que  $\mathcal{C}_f$  est strictement au-dessus de  $\mathcal{C}_g$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$  et que  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont en commun leur point d'abscisse 0.

4) Puisque les fonction  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[0, 1]$  et que pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , l'aire demandée est

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1) dx = \left[ e^x - 2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + x \right]_0^1 \\ &= (e^1 - 4e^{\frac{1}{2}} + 1) - (e^0 - 4e^0 + 0) = e - 4e^{\frac{1}{2}} + 4. \end{aligned}$$

L'aire demandée est égale à  $e - 4e^{\frac{1}{2}} + 4$  ou encore 0,12 à  $10^{-2}$  près par défaut.

