

EXERCICE 1

Partie A

1) X suit une loi binomiale. En effet,

- 2 000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le cône est défectueux » avec une probabilité  $p = 0,003$  et « le cône n'est pas défectueux » avec une probabilité  $1 - p = 0,997$ .

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres  $n = 2\,000$  et  $p = 0,003$ .

2) La probabilité demandée est  $p(X \leq 11)$ . La calculatrice fournit

$$p(X \leq 11) = 0,980 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie B

Soit  $Z = \frac{Y - 110}{\sigma}$ . On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

$$104 \leq Y \leq 116 \Leftrightarrow -6 \leq Y - 110 \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma} \leq \frac{Y - 110}{\sigma} \leq \frac{6}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma} \leq Z \leq \frac{6}{\sigma},$$

et donc  $p(104 \leq Y \leq 116) = p\left(-\frac{6}{\sigma} \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right)$ . L'énoncé donne  $p\left(-\frac{6}{\sigma} \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) = 0,98$ . Pour des raisons de symétrie,  $p\left(Z \leq -\frac{6}{\sigma}\right) = \frac{1 - 0,98}{2} = 0,01$  et donc

$$p\left(Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) = p\left(Z \leq -\frac{6}{\sigma}\right) + p\left(-\frac{6}{\sigma} \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) = 0,98 + 0,01 = 0,99.$$

La calculatrice fournit  $\frac{6}{\sigma} = 2,32\dots$  ou encore  $\sigma = 2,57\dots$  et donc

$$\sigma = 2,6 \text{ à } 10^{-1} \text{ près par excès.}$$

Partie C

Ici,  $n = 900$  et  $f = \frac{795}{900} = \frac{53}{60}$ . On note que  $n \geq 30$  puis  $nf = 795$  et donc  $nf \geq 5$  et  $n(1-f) = 105$  et donc  $n(1-f) \geq 5$ .

L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % est  $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$  ou encore  $\left[\frac{53}{60} - \frac{1}{30}, \frac{53}{60} + \frac{1}{30}\right]$  ou encore  $\left[\frac{51}{60}, \frac{55}{60}\right]$  ou enfin  $[0,85; 0,91\dots]$ . La probabilité  $p = 0,84$  n'appartient pas à l'intervalle de confiance et donc on ne peut pas affirmer, au niveau de confiance de 95 %, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010.

## EXERCICE 2

Affirmation 1	VRAI
Affirmation 2	FAUX
Affirmation 3	VRAI
Affirmation 4	VRAI
Affirmation 5	FAUX

### Justification 1.

1ère solution.  $|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  puis

$$-1 + i = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (-1 + i)^{10} &= (\sqrt{2})^{10} \times \left( e^{\frac{3i\pi}{4}} \right)^{10} = \left( (\sqrt{2})^2 \right)^5 \times e^{\frac{3i\pi \times 10}{4}} = 2^5 e^{\frac{15i\pi}{2}} \\ &= 32 e^{\frac{16i\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}} = 32 e^{8i\pi - i\frac{\pi}{2}} = 32 e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= -32i. \end{aligned}$$

En particulier, le point d'affixe  $(-1 + i)^{10}$  est situé sur l'axe imaginaire. L'affirmation 1 est vraie.

2ème solution.  $(-1 + i)^2 = (-1)^2 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$  puis

$$(-1 + i)^{10} = ((-1 + i)^2)^5 = (-2i)^5 = (-2)^5 i^5 = -32 \times i^2 \times i^2 \times i = -32i.$$

2) **Justification 2.** Soit  $z$  un nombre complexe. Posons  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels.

$$z - \bar{z} + 2 - 4i = (x + iy) - (x - iy) + 2 - 4i = 2iy + 2 - 4i = 2 + i(2y - 4).$$

En particulier, la partie réelle de  $z - \bar{z} + 2 - 4i$  est égale à 2. Cette partie réelle n'est pas nulle. Mais alors,  $z - \bar{z} + 2 - 4i$  n'est jamais nul ou encore l'équation  $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{C}$ . L'affirmation 2 est fausse.

3) **Justification 3.**

$$\ln(\sqrt{e^7}) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \frac{1}{2} \ln(e^7) + \frac{9}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8$$

et

$$\frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}} = \frac{e^{\ln 6}}{e^{\ln(3/4)}} = \frac{6}{3/4} = \frac{24}{3} = 8.$$

Donc l'affirmation 3 est vraie.

4) **Justification 4.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 2} dx &= \int_0^{\ln 3} \frac{(e^x + 2)'}{e^x + 2} dx = [\ln(e^x + 2)]_0^{\ln 3} = \ln(e^{\ln 3} + 2) - \ln(e^0 + 2) \\ &= \ln(3 + 2) - \ln(1 + 2) = \ln(5) - \ln(3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) = -\ln\left(\frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

Donc l'affirmation 4 est vraie.

5) **Justification 5.**

Soit  $x$  un réel.

$$\begin{aligned} \ln(x - 1) - \ln(x + 2) = \ln 4 &\Leftrightarrow \ln(x - 1) = \ln 4 + \ln(x + 2) \Leftrightarrow \ln(x - 1) = \ln(4(x + 2)) \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 4(x + 2) \text{ et } x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow -3x = 9 \text{ et } x > 1 \Leftrightarrow x = -3 \text{ et } x > 1. \end{aligned}$$

Puisque  $-3 \leq 1$ , l'équation proposée n'a pas de solution. Donc l'affirmation 5 est fausse.

### EXERCICE 3

1) a) Les coordonnées du point I sont  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$  ou encore  $(1, 1, 1)$ .

De même, les coordonnées de J sont  $(3, 3, -1)$ .

Notons  $(x, y, z)$  les coordonnées du point K.

$$\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{3}(-5 - 1) \\ y - 2 = \frac{1}{3}(5 - 2) \\ z - 3 = \frac{1}{3}(0 - 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{I(1, 1, 1), J(3, 3, -1) \text{ et } K(-1, 3, 2).}$$

b) Les coordonnées du vecteur  $\vec{IJ}$  sont  $(2, 2, -2)$  et les coordonnées du vecteur  $\vec{IK}$  sont  $(-2, 2, 1)$ .

S'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{IK} = \lambda\vec{IJ}$ , alors  $-2 = 2\lambda$  (en analysant la première coordonnée) et donc  $\lambda = -1$  et aussi  $2 = 2\lambda$  (en analysant la deuxième coordonnée) et donc  $\lambda = 1$ . Ceci est impossible et donc les vecteurs  $\vec{IJ}$  et  $\vec{IK}$  ne sont pas colinéaires ou encore les points I, J et K ne sont pas alignés.

On a montré que les points I, J et K définissent un plan.

c)

$$\vec{n} \cdot \vec{IJ} = 3 \times 2 + 1 \times 2 + 4 \times (-2) = (3 + 1 - 4) \times 2 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{IK} = 3 \times (-2) + 1 \times 2 + 4 \times 1 = -6 + 2 + 4 = 0.$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) et donc le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan (IJK).

Le plan (IJK) est le plan passant par  $I(1, 1, 1)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(3, 1, 4)$ . Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc  $3(x - 1) + (y - 1) + 4(z - 1) = 0$  ou encore  $3x + y + 4z - 8 = 0$ .

$$\boxed{\text{Une équation du plan (IJK) est } 3x + y + 4z - 8 = 0.}$$

2) a) La droite (BD) est la droite passant par  $B(1, 2, 3)$  et de vecteur directeur  $\vec{BD}(10, -1, -5)$ . Une représentation paramétrique de la droite (BD) est donc

$$\begin{cases} x = 1 + 10t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit  $M(1 + 10t, 2 - t, 3 - 5t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de la droite (BD).

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 3(1 + 10t) + (2 - t) + 4(3 - 5t) - 8 = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Quand  $t = -1$ , on obtient les coordonnées du point L :  $(-9, 3, 8)$ .

$$\boxed{\text{Le point L a pour coordonnées } (-9, 3, 8).}$$

c) Les coordonnées du segment [LD] sont  $\left(\frac{-9 + 11}{2}, \frac{3 + 1}{2}, \frac{8 - 2}{2}\right)$  ou encore  $(1, 2, 3)$ . Par suite, le milieu du segment [LD] est le point B ou encore le point L est le symétrique du point D par rapport au point B.

## EXERCICE 4

1)  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et pour tout réel positif  $x$ ,

$$f'(x) = 0 - 4 \times \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

La dérivée de  $f$  est positive sur  $[0, +\infty[$  et donc la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

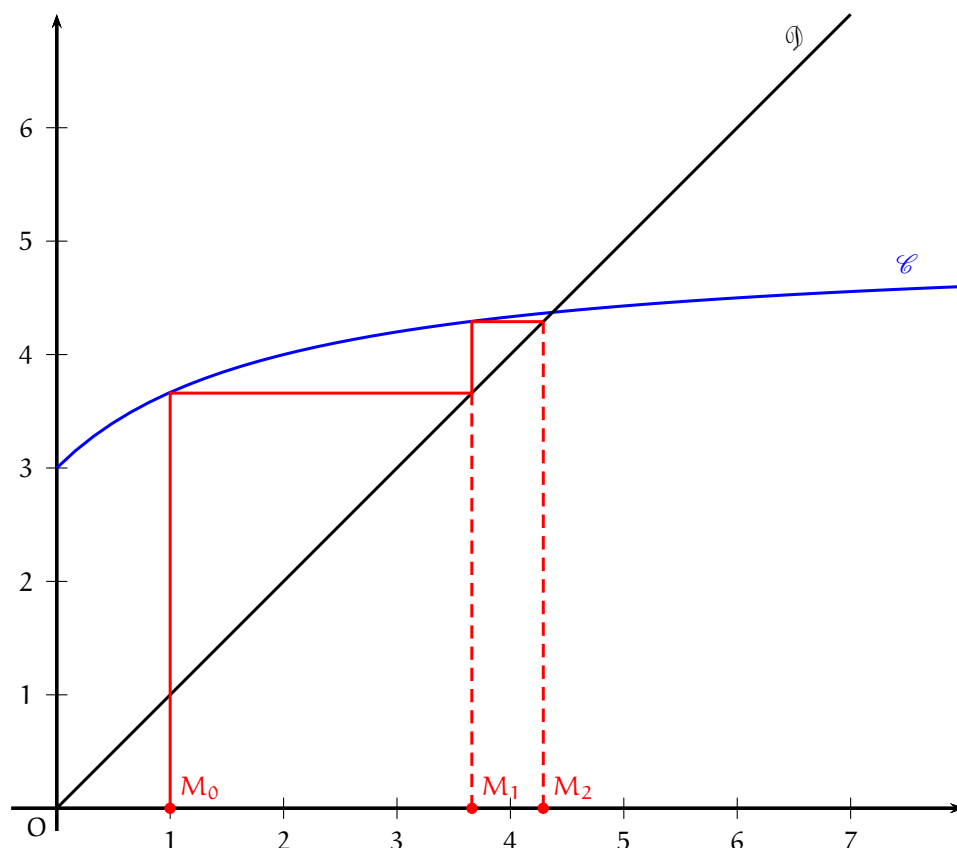
2) Soit  $x$  un réel positif.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 5 - \frac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow \frac{5(x+2) - 4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5x + 6 = x^2 + 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation  $x^2 - 3x - 6 = 0$  est  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 33$ . L'équation  $x^2 - 3x - 6 = 0$  admet deux solutions réelles distinctes à savoir  $x_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$  et  $x_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$ .  $x_1$  est un réel positif et  $x_2$  est un réel strictement négatif. Donc l'équation  $x^2 - 3x - 6 = 0$  admet une et une seule solution positive à savoir le réel  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$ . La calculatrice fournit

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} = 4,37 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

3) Représentation graphique.



Il semble que la suite  $(u_n)$  soit croissante, convergente de limite  $\alpha$ .

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

- $u_0 = 1$  et donc  $u_0 \geq 0$ .  $u_1 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} = 3,6\dots$  Donc  $u_1 \geq u_0$ . Enfin,  $\alpha = 4,3\dots$  et donc  $\alpha \geq u_1$ . Ainsi,  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ . La propriété à démontrer est vraie quand  $n = 0$ .
- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$  et montrons que  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ .

$$\begin{aligned}
0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha &\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) \text{ (par croissance de la fonction } f \text{ sur } [0, +\infty[) \\
&\Rightarrow 3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha \\
&\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

b) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par le réel  $\alpha$ . Donc la suite  $(u_n)$  est convergente.

5) a)  $S_0 = u_0 = 1$ ,  $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3} = 4,66$  à  $10^{-2}$  près.

$u_2 = 5 - \frac{4}{\frac{11}{3} + 2} = 5 - \frac{12}{17} = \frac{73}{17}$  puis  $S_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} = \frac{457}{51} = 8,96$  à  $10^{-2}$  près.

b) Algorithme complété.

<b>Entrée</b>	$n$ un entier naturel
<b>Variables</b>	$u$ et $s$ sont des variables réelles $n$ et $i$ sont des variables entières
<b>Initialisation :</b>	$u$ prend la valeur 1 $s$ prend la valeur $u$ $i$ prend la valeur 0 Demander la valeur de $n$
<b>Traitement</b>	Tant que $i < n$  Affecter à $i$ la valeur $i + 1$ Affecter à $u$ la valeur $5 - \frac{4}{u + 2}$ Affecter à $s$ la valeur $s + u$  Fin tant que
<b>Sortie</b>	Afficher $s$

c) La suite  $(u_n)$  est croissante. On en déduit que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq u_0$  ou encore  $u_n \geq 1$ . Par suite, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$S_n \geq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ termes}} = n + 1.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$ , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$