# Nouvelle Calédonie. Novembre 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

**EXERCICE 1**

**Partie A**

**1)** X suit une loi binomiale. En effet,

- 2 000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le cône est défectueux » avec une probabilité $p = 0,003$ et « le cône n'est pas défectueux » avec une probabilité $1 - p = 0,997$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2\,000$ et $p = 0,003$.

**2)** La probabilité demandée est $p(X \leqslant 11)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p(X \leqslant 11) = 0,980 \text{ arrondi au millième.}}$$

**Partie B**

Soit $Z = \dfrac{Y - 110}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

$$104 \leqslant Y \leqslant 116 \Leftrightarrow -6 \leqslant Y - 110 \leqslant 6 \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma} \leqslant \frac{Y-110}{\sigma} \leqslant \frac{6}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{6}{\sigma},$$

et donc $p(104 \leqslant Y \leqslant 116) = p\left(-\dfrac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right)$. L'énoncé donne $p\left(-\dfrac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right) = 0,98$. Pour des raisons de symétrie, $p\left(Z \leqslant -\dfrac{6}{\sigma}\right) = \dfrac{1 - 0,98}{2} = 0,01$ et donc

$$p\left(Z \leqslant \frac{6}{\sigma}\right) = p\left(Z \leqslant -\frac{6}{\sigma}\right) + p\left(-\frac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{6}{\sigma}\right) = 0,98 + 0,01 = 0,99.$$

La calculatrice fournit $\dfrac{6}{\sigma} = 2,32\ldots$ ou encore $\sigma = 2,57\ldots$ et donc

$$\boxed{\sigma = 2,6 \text{ à } 10^{-1} \text{ près par excès.}}$$

**Partie C**

Ici, $n = 900$ et $f = \dfrac{795}{900} = \dfrac{53}{60}$. On note que $n \geqslant 30$ puis $nf = 795$ et donc $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) = 105$ et donc $n(1-f) \geqslant 5$.

L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ou encore $\left[\dfrac{53}{60} - \dfrac{1}{30}, \dfrac{53}{60} + \dfrac{1}{30}\right]$ ou encore $\left[\dfrac{51}{60}, \dfrac{55}{60}\right]$ ou enfin $[0,85; 0,91\ldots]$. La probabilité $p = 0,84$ n'appartient pas à l'intervalle de confiance et donc on ne peut pas affirmer, au niveau de confiance de 95 %, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010.

 

**EXERCICE 2**

| | |
|---|---|
| **Affirmation 1** | **VRAI** |
| **Affirmation 2** | **FAUX** |
| **Affirmation 3** | **VRAI** |
| **Affirmation 4** | **VRAI** |
| **Affirmation 5** | **FAUX** |

**Justification 1.**

**1ère solution.** $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(-1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\right)^{10} \times \left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^{10} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^5 \times e^{\frac{3i\pi\times 10}{4}} = 2^5 e^{\frac{15i\pi}{2}}\\ &= 32e^{\frac{16i\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}} = 32e^{8i\pi - i\frac{\pi}{2}} = 32e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ &= -32i.\end{aligned}$$

En particulier, le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire. L'affirmation 1 est vraie.

**2ème solution.** $(-1+i)^2 = (-1)^2 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$ puis

$$(-1+i)^{10} = \left((-1+i)^2\right)^5 = (-2i)^5 = (-2)^5 i^5 = -32 \times i^2 \times i^2 \times i = -32i.$$

**2) Justification 2.** Soit $z$ un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels.

$$z - \overline{z} + 2 - 4i = (x+iy) - (x-iy) + 2 - 4i = 2iy + 2 - 4i = 2 + i(2y-4).$$

En particulier, la partie réelle de $z - \overline{z} + 2 - 4i$ est égale à 2. Cette partie réelle n'est pas nulle. Mais alors, $z - \overline{z} + 2 - 4i$ n'est jamais nul ou encore l'équation $z - \overline{z} + 2 - 4i = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$. L'affirmation 2 est fausse.

**3) Justification 3.**

$$\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)} = \frac{1}{2}\ln\left(e^7\right) + \frac{9}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8$$

et

$$\frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}} = \frac{e^{\ln 6}}{e^{\ln(3/4)}} = \frac{6}{3/4} = \frac{24}{3} = 8.$$

Donc l'affirmation 3 est vraie.

**4) Justification 4.**

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx &= \int_0^{\ln 3} \frac{(e^x+2)'}{e^x+2}\,dx = \left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^{\ln 3} = \ln\left(e^{\ln 3}+2\right) - \ln\left(e^0+2\right)\\ &= \ln(3+2) - \ln(1+2) = \ln(5) - \ln(3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) = -\ln\left(\frac{3}{5}\right).\end{aligned}$$

Donc l'affirmation 4 est vraie.

**5) Justification 5.**

Soit $x$ un réel.

$$\begin{aligned}\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4 &\Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln 4 + \ln(x+2) \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln(4(x+2))\\ &\Leftrightarrow x - 1 = 4(x+2) \text{ et } x - 1 > 0\\ &\Leftrightarrow -3x = 9 \text{ et } x > 1 \Leftrightarrow x = -3 \text{ et } x > 1.\end{aligned}$$

Puisque $-3 \leqslant 1$, l'équation proposée n'a pas de solution. Donc l'affirmation 5 est fausse.

 

**EXERCICE 3**

**1) a)** Les coordonnées du point I sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2},\right)$ ou encore $(1,1,1)$.

De même, les coordonnées de J sont $(3,3,-1)$.

Notons $(x,y,z)$ les coordonnées du point K.

$$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-1=\dfrac{1}{3}(-5-1)\\ y-2=\dfrac{1}{3}(5-2)\\ z-3=\dfrac{1}{3}(0-3)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1\\ y=3\\ z=2\end{array}\right.$$

$$\boxed{I(1,1,1),\ J(3,3,-1)\text{ et }K(-1,3,2).}$$

**b)** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont $(2,2,-2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IK}$ sont $(-2,2,1)$.
S'il existe un réel $\lambda$ tel que $\overrightarrow{IK}=\lambda\overrightarrow{IJ}$, alors $-2=2\lambda$ (en analysant la première coordonnée) et donc $\lambda=0$ et aussi $2=2\lambda$ (en analysant la deuxième coordonnée) et donc $\lambda=1$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points I, J et K ne sont pas alignés.

On a montré que les points I, J et K définissent un plan.

**c)**

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ}=3\times2+1\times2+4\times(-2)=(3+1-4)\times2=0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ}=3\times(-2)+1\times2+4\times1=-6+2+4=0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(IJK)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $(IJK)$.

Le plan $(IJK)$ est le plan passant par $I(1,1,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3,1,4)$. Une équation cartésienne du plan $(IJK)$ est donc $3(x-1)+(y-1)+4(z-1)=0$ ou encore $3x+y+4z-8=0$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan }(IJK)\text{ est }3x+y+4z-8=0.}$$

**2) a)** La droite $(BD)$ est la droite passant par $B(1,2,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BD}(10,-1,-5)$. Une représentation paramétrique de la droite $(BD)$ est donc

$$\left\{\begin{array}{l}x=1+10t\\ y=2-t\\ z=3-5t\end{array}\right.,\quad t\in\mathbb{R}.$$

**b)** Soit $M(1+10t,2-t,3-5t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite $(BD)$.

$$M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow3(1+10t)+(2-t)+4(3-5t)-8=0\Leftrightarrow9t+9=0\Leftrightarrow t=-1.$$

Quand $t=-1$, on obtient les coordonnées du point L : $(-9,3,8)$.

$$\boxed{\text{Le point L a pour coordonnées }(-9,3,8).}$$

**c)** Les coordonnées du segment [LD] sont $\left(\dfrac{-9+11}{2},\dfrac{3+1}{2},\dfrac{8-2}{2}\right)$ ou encore $(1,2,3)$. Par suite, le milieu du segment [LD] est le point B ou encore le point L est le symétrique du point D par rapport au point B.

 

**EXERCICE 4**

**1)**

| A | B | D |
|---|---|---|
| 12 | 14 | 2 |
| 2 | 12 | 10 |
| 10 | 2 | 8 |
| 8 | 10 | 2 |
| 2 | 8 | 6 |
| 6 | 2 | 4 |
| 4 | 6 | 2 |
| 2 | 4 | 2 |
| 2 | 2 | 0 |
| | | |
| | | |

Si on entre $A = 12$ et $B = 14$, la valeur affichée par l'algorithme est $2$.

**2) a)** Puisque PGCD$(221, 331) = 1$, les nombres $221$ et $331$ sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $221u + 331v = 1$. Le couple $(x, y) = (u, -v)$ est donc un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $(E)$.

Ainsi, il existe au moins un couple $(x, y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E)$.

**b)** $221 \times 3 - 331 \times 2 = 663 - 662 = 1$. Donc, le couple $(x_0, y_0) = (3, 2)$ est une solution de l'équation $(E)$.

Soit $(x, y)$ un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $(E)$. Alors $221x - 331y = 221x_0 - 331y_0$ puis

$$221\,(x - x_0) = 331\,(y - y_0)\,.$$

L'entier $331$ divise l'entier $331\,(y - y_0)$ et donc divise l'entier $221\,(x - x_0)$. Puisque les entiers $331$ et $221$ sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier $331$ divise l'entier $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif $k$ tel que $x - x_0 = 331k$ ou encore tel que $x = x_0 + 331k$.
De même, l'entier $221$ divise l'entier $y - y_0$ et donc il existe un entier relatif $k'$ tel que $y = y_0 + 221k'$.

En résumé, si $(x, y)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $(E)$, il existe nécessairement des entiers relatifs $k$ et $k'$ tels que $x = x_0 + 331k$ et $y = y_0 + 221k'$.

Réciproquement, soient $k$ et $k'$ deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 331k$ et $y = y_0 + 221k'$.

$$\begin{aligned}221x - 331y = 1 &\Leftrightarrow 221\,(x_0 + 331k) - 331\,(y_0 + 221k') = 1 \Leftrightarrow 221 \times 331 \times (k - k') + 221x_0 - 331y_0 = 1\\ &\Leftrightarrow 221 \times 331 \times (k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.\end{aligned}$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E)$ sont les couples de la forme $(3 + 331k, 2 + 221k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

**3) a)** La suite $(v_n)$ est arthmétique de raison $r = 331$. On sait que pour tout entier naturel $n$,

$$v_n = v_0 + nr = 3 + 331n.$$

**b)** Soit $(p, q)$ un couple d'entiers naturels.

$$\begin{aligned}u_p = v_q &\Leftrightarrow 2 + 221p = 3 + 331q \Leftrightarrow 221p - 331q = 1\\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } p = 3 + 331k \text{ et } q = 2 + 221k \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ et } q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$0 \leqslant p \leqslant 500 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3 + 331k \leqslant 500 \Leftrightarrow -3 \leqslant 331k \leqslant 497 \Leftrightarrow -\frac{3}{331} \leqslant k \leqslant \frac{497}{331} \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } k = 1.$$

De même,

 

$$0 \leqslant q \leqslant 500 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2 + 221k \leqslant 500 \Leftrightarrow -2 \leqslant 221k \leqslant 498 \Leftrightarrow -\frac{2}{221} \leqslant k \leqslant \frac{498}{221} \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } k = 1 \text{ ou } k = 2.$$

et finalement $0 \leqslant p \leqslant 500$ et $0 \leqslant q \leqslant 500$ équivaut à $k = 0$ ou $k = 1$.

$k = 0$ fournit $p = 3$ et $q = 2$ et $k = 1$ fournit $p = 334$ et $q = 223$.

$\boxed{\text{Les couples } (p, q) \text{ solutions sont } (3, 2) \text{ et } (334, 223).}$

On note que $u_3 = 665 = v_2$ et $u_{334} = 73816 = v_{223}$.

 