Nouvelle Calédonie. Mars 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) **réponse b)**

2) **réponse c)**

3) **réponse c)**

4) **réponse c)**

Explications
1) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Ensuite,

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

On en déduit que

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi}.$$

La bonne réponse est la réponse b).

2) Soient x et y deux réels puis $z = x+iy$.

$$\begin{aligned}|z-1+i| = \left|\sqrt{3}-i\right| &\Leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)|^2 = \left|\sqrt{3}-i\right|^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 4.\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse c).

3) Pour tout entier naturel n,

$$|Z_{n+1}| = \frac{|1+i|}{2}|Z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}|Z_n|.$$

La suite $(|Z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Puisque $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que la suite $(|Z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite égale à 0.

Donc, la bonne réponse est la réponse c).

On peut noter que $|Z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $|Z_1| \neq \sqrt{2} = |Z_0|$ et aussi $OM_1 \neq OM_1$. Donc les réponses a) et b) sont effectivement fausses.
D'autre part, $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n} = \frac{1+i}{2} - 1 = \frac{-1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et donc un argument de $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $-\frac{\pi}{4}$. La réponse d) est effectivement fausse.

4)

$$Z = \frac{(1+5i)-(-1-i)}{(2-2i)-(-1-i)} = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{2i(3-i)}{3-i} = 2i.$$

Donc Z n'est pas réel et la réponse a) est fausse. D'autre part,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|Z_C - Z_A|}{|Z_B - Z_A|} = \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = |2i| = 2,$$

et donc $AC \neq AB$. La réponse b) est fausse.

Ensuite,

$$MB = |Z_B - Z| = |2-2i-2i| = |2-4i| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

et

$$MC = |Z_C - Z| = |1 + 5i - 2i| = |1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Donc, $MB \neq MC$ et la réponse d) est fausse. La bonne réponse est la réponse c). Vérifions le.

$Z_{\overrightarrow{AB}} = 3 - i$ ou encore les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3, -1)$.
$Z_{\overrightarrow{AC}} = 2 + 6i$ ou encore les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(2, 6)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 0.$$

La proposition c) est effectivement vraie.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

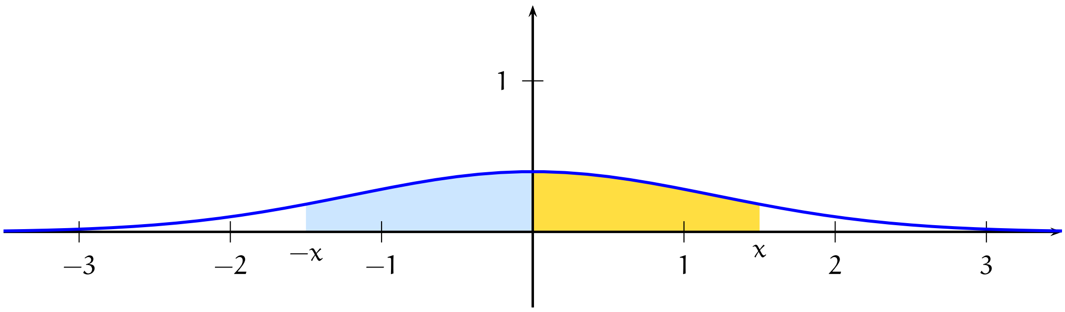
Partie A

Restitution organisée des connaissances

1) La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite.

2) $H(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 1$.

3) Soit x un réel positif. Puisque la fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine jaune ci-dessous et $\displaystyle\int_{-x}^0 f(t)\,dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine bleu ci-dessous.



La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc ces deux aires sont égales. Comme $H(x)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la réunion des deux domaines, on en déduit que
$H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

4) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. On sait alors que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que sa dérivée est f. On en déduit que pour tout réel positif x, $H'(x) = 2f(x)$.

La fonction f est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction H.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$H'(x)$	$+$
H	$0 \nearrow 1$

5) Soit α un réel élément de $]0, 1[$. Alors $1 - \alpha$ est un réel élément de $]0, 1[$.

La fonction H est continue continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x \to 0} H(x), \lim\limits_{x \to +\infty} H(x)\right[=]0, 1[$, l'équation $H(x) = k$ a une unique solution dans $]0, +\infty[$. Puisque le réel $1-\alpha$ appartient à $]0, 1[$, on a montré qu'il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $H(\chi_\alpha) = 1 - \alpha$ ou encore tel que $P(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha) = 1 - \alpha$.

Partie B

1) L'énoncé fournit $p(A) = 0,6$, $p_A(D) = 0,046$ et $p(D) = 0,05$. La probabilité demandée est $p_D(A)$.

$$p_D(A) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A) \times p_A(D)}{p(D)} = \frac{0,6 \times 0,046}{0,05} = 0,552.$$

$$\boxed{p_D(A) = 0,552.}$$

2) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D)$$

et donc

$$p(B \cap D) = p(D) - p(A \cap D) = p(D) - p(A) \times p_A(D) = 0,05 - 0,6 \times 0,046 = 0,022\,4.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

$$\boxed{p(B \cap D) = 0,022\,4.}$$

3) La probabilité demandée est $p_B(D)$. Or

$$p_B(D) = \frac{p(B \cap D)}{p(B)} = \frac{p(B \cap D)}{1 - p(A)} = \frac{0,022\,4}{0,4} = 0,056$$

ou encore

$$\boxed{5,6\% \text{ des pipettes de l'entreprise B présentent un défaut.}}$$

Partie C

1) La probabilité demandée est $P(98 \leqslant X \leqslant 102)$. Or,

$$P(98 \leqslant X \leqslant 102) = P(X \leqslant 102) - P(X \leqslant 98) = 0,974\,94 - 0,025\,06 = 0,949\,88.$$

Donc

$$\boxed{\text{La probabilité pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme est } 0,949\,8 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

2) a) Y_n suit une loi binomiale. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées (prélever une pipette n fois) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la pipette est non conforme » avec une probabilité $p = 0,05$ et « la pipette est conforme » avec une probabilité $1 - p = 0,95$.

Donc, Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,05$.

b) L'énoncé dit que $n \geqslant 100$ et en particulier $n \geqslant 30$. Ensuite, $np \geqslant 100 \times 0,05 = 5$ et $n(1-p) \geqslant 100 \times 0,95 = 95$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

c) Les conditions b) étant vérifiées, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,05 \times 0,95}}{\sqrt{n}}, 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,05 \times 0,95}}{\sqrt{n}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on peut prendre comme intervalle

$$\left[0,05 - \frac{0,428}{\sqrt{n}}, 0,05 + \frac{0,428}{\sqrt{n}}\right].$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

Partie A

1) Limite de f en 0. En posant $x = \dfrac{1}{X}$, on obtient

$$\lim_{x\to 0,\ x>0} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0$$

d'après un théorème de croissances comparées.

Limite de f en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0,\ x>0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \ln(x) + 1.}$$

3) Soit x un réel strictement positif.

$\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
De même, $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $\left]e^{-1}, +\infty\right[$, strictement négative sur $\left]0, e^{-1}\right[$ et s'annule en e^{-1}. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1) a) $U = \dfrac{1}{4}f(1) + \dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{2}{4}\right) + \dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{3}{4}\right)$ et $V = \dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{2}{4}\right) + \dfrac{1}{4}f\left(1+\dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{1}{4}f(2)$.

U est la somme des aires des rectangles au-dessous de la courbe et V est la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

b) • $U = \dfrac{1}{4}\left(1,25\ln(1,25) + 1,5\ln(1,5) + 1,75\ln(1,75)\right) = 0,466\,6$ à 10^{-4} près par défaut.

• $V = \dfrac{1}{4}\left(1,25\ln(1,25) + 1,5\ln(1,5) + 1,75\ln(1,75) + 2\ln(2)\right) = 0,813\,2$ à 10^{-4} près par excès.

c) On en déduit que $0,466\,6 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0,813\,2$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$V_n - U_n = \frac{f(2) - f(1)}{n} = \frac{2\ln(2)}{n},$$

puis

$$V_n - U_n < 0,1 \Leftrightarrow \frac{2\ln(2)}{n} < 0,1 \Leftrightarrow n > 20\ln(2) \Leftrightarrow n > 13,8\ldots$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant 14 \text{ (car } n \text{ est un entier naturel)}$$

b) Algorithme modifié.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels

Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 14

Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $U + \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V + \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$
Fin pour

Affichage
Afficher $U \leqslant \mathcal{A} \leqslant V$

Partie C

1) La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2} = x\ln(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln(x) = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) La fonction f est continue et positive sur $[1, 2]$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^2 f(x)\ dx = [F(x)]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2}\ln(2) - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{1^2}{4}\right) \\ &= 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\ln(2) - \frac{3}{4} = 0,6362\ldots}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

EXERCICE 4

1) Les trois points A, B et J ne sont pas alignés. Ils définissent donc un unique plan, le plan (ABJ) qui est aussi le plan (ABE). Le point I n'est pas dans ce plan et donc les points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2) Le plan (P_1) est le plan passant par le point P et de vecteur normal $\overrightarrow{AP}$.
Le point P a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{AP}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Donc une équation du plan (P_1) est $1 \times (x-1) + 0 \times (y-0) + 0 \times (z-0) = 0$ ou encore $x = 1$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (P_1) \text{ est } x = 1.}$$

3) Le point I a pour coordonnées $(1, 3, 0)$ et le point J a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Le milieu K du segment [IJ] a donc pour coordonnées $\left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{JI}$ a pour coordonnées $(0, 3, -1)$.

Le plan (P_2) est le plan passant par K et de vecteur normal $\overrightarrow{JI}$.
Une équation cartésienne de (P_2) est donc $0 \times (x-1) + 3 \times \left(y - \dfrac{3}{2}\right) - 1 \times \left(z - \dfrac{1}{2}\right) = 0$ ou encore $3y - z - 4 = 0$.

4) a) Un vecteur normal au plan (P_1) est le vecteur $\overrightarrow{n_1}(1, 0, 0)$ et un vecteur normal au plan (P_2) est le vecteur $\overrightarrow{n_2}(0, 3, -1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans (P_1) et (P_2) sont sécants en une droite.

b) Soit $M(1, t, 3t-4)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ. D'une part, $x_M = 1$ et donc M appartient au plan (P_1). D'autre part,

$$3y_M - z_M - 4 = 3t - (3t-4) - 4 = 0,$$

et donc M appartient au plan (P_2).

En résumé, tout point de Δ appartient aux plans (P_1) et (P_2) et donc, la droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t-4 \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P_1) et (P_2).

c) Soit $M(1, t, 3t-4)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$\begin{aligned}
MA = MI &\Leftrightarrow AM^2 = IM^2 \\
&\Leftrightarrow (1)^2 + (t)^2 + (3t-4)^2 = (1-1)^2 + (t-3)^2 + (3t-4-0)^2 \\
&\Leftrightarrow 1 + t^2 = t^2 - 6t + 9 \\
&\Leftrightarrow 6t = 8 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Quand $t = \dfrac{4}{3}$, on obtient le point Ω de coordonnées $\left(1, \dfrac{4}{3}, 0\right)$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } \Omega \text{ sont } \left(1, \frac{4}{3}, 0\right).}$$

d) On a $\Omega I = \Omega A = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + 0^2} = \dfrac{5}{3}$. Ensuite, $\Omega B = \sqrt{(1-2)^2 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + 0^2} = \dfrac{5}{3}$.
Enfin, $\Omega J = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\dfrac{4}{3} - 0\right)^2 + (0-1)^2} = \dfrac{5}{3}$.

En résumé, $\Omega A = \Omega B = \Omega I = \Omega J = \dfrac{5}{3}$ et donc le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABIJ$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.