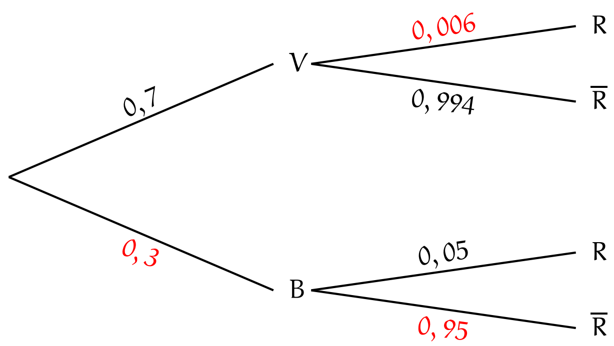
Liban 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) $p(V \cap R) = p(V) \times p_V(R) = p(V) \times \left(1 - p_V\left(\overline{R}\right)\right) = 0,7 \times (1 - 0,994) = 0,0042.$

$$\boxed{p(V \cap R) = 0,0042.}$$

3) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(R) &= p(V \cap R) + p(B \cap R) = p(V) \times \left(1 - p_V\left(\overline{R}\right)\right) + (1 - p(V)) \times p_B(R) \\ &= 0,0042 + (1 - 0,7) \times 0,05 = 0,0042 + 0,015 = 0,0192. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(R) = 0,0192.}$$

4) La probabilité demandée est $p_R(B)$.

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p_B(R)}{p(R)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,0192} = 0,78125.$$

$$\boxed{p_R(B) = 0,7812 \text{ arrondi au dix millième.}}$$

Partie B : le vélo

1) La probabilité demandée est $p(15 \leqslant T \leqslant 20)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p(15 \leqslant T \leqslant 20) = 0,946 \text{ arrondi au dix millième.}}$$

2) La probabilité demandée est $p(T > 20)$ qui est aussi $p(T \geqslant 20)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p(T > 20) = 0,0062 \text{ arrondi au dix millième.}}$$

3) On cherche d'abord le réel t tel que $p(T \leqslant t) = 0,9$. La calculatrice fournit $t = 18,5\ldots$ minutes. En arrondissant à la minute de manière à être sûr de ne pas être en retard, on obtient une durée de 19 min. L'élève doit donc partir à 8 h 00 moins 19 min ou encore l'élève doit partir à 7 h 41 au plus tard.

Partie C : le bus

1) On sait que la variable aléatoire Z' suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

2) Tout d'abord,

$$\begin{aligned} T' \leqslant 20 &\Leftrightarrow T' - 15 \leqslant 5 \Leftrightarrow \frac{T' - 15}{\sigma'} \leqslant \frac{5}{\sigma'} \\ &\Leftrightarrow Z' \leqslant \frac{5}{\sigma'}, \end{aligned}$$

puis

$$p(T' \geqslant 20) = 0,05 \Leftrightarrow p(T' \leqslant 20) = 0,95 \Leftrightarrow p\left(Z' \leqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,95.$$

Soit a est le réel tel que $p(Z' \leqslant a) = 0,95$. Alors,

$$p\left(Z' \leqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \frac{5}{\sigma'} = a \Leftrightarrow \sigma' = \frac{5}{a}.$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{\sigma' = 3,04 \text{ à } 0,01 \text{ près.}}$$

EXERCICE 2

Proposition 1	**VRAI**
Proposition 2	**VRAI**
Proposition 3	**FAUX**
Proposition 4	**FAUX**
Proposition 5	**VRAI**

Justification 1 Notons Δ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

$t = 2$ fournit le point A et $t = 1$ fournit le point B. Donc les points A et B appartiennent à la droite Δ ou encore Δ est la droite (AB). Donc la proposition 1 est vraie.

Justification 2 Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(2, 1, 3)$ et un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{u'}(-2, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = 2 \times (-2) + 1 \times 1 + 3 \times 1 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux ou encore les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales. La proposition 2 est vraie.

Justification 3 Puisque $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales, $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles et sont donc soit sécantes soit non coplanaires.

Soient $M(2t, 1 + t, -5 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$ et $N(5 - 2u, -1 + u, -2 + u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de (AB).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t = 5 - 2u \\ 1 + t = -1 + u \\ -5 + 3t = -2 + u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = t + 2 \\ 2t = 5 - 2(t + 2) \\ -5 + 3t = -2 + (t + 2) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = t + 2 \\ 4t = 1 \\ 2t = 5 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites $\mathscr{D}$ et (AB) n'ont aucun point commun. Par suite, les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas coplanaires. La proposition 3 est fausse.

Justification 4 Soit $M(2t, 1 + t, -5 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (2t) - (1 + t) + 3(-5 + 3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 10t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}.$$

Ceci montre déjà que la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point. Pour $t = \dfrac{3}{2}$, on obtient le point de coordonnées $\left(3; \dfrac{5}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$. Donc, la proposition 4 est fausse.

Justification 5 Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, -1, 3)$. Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2, -1, -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(6, 0, -2)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 6 + (-1) \times 0 + 3 \times (-2) = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) puis les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles. La proposition 5 est vraie.

EXERCICE 3

Partie A

1) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $e^{-x} > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

2) Pour tout réel $x > 0$, $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$.

Un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Partie B

1) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. On sait alors que la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout réel t de $[0, +\infty[$, $\mathscr{A}'(t) = f(t) = te^{-t}$. Puisque la fonction f est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0, on en déduit que

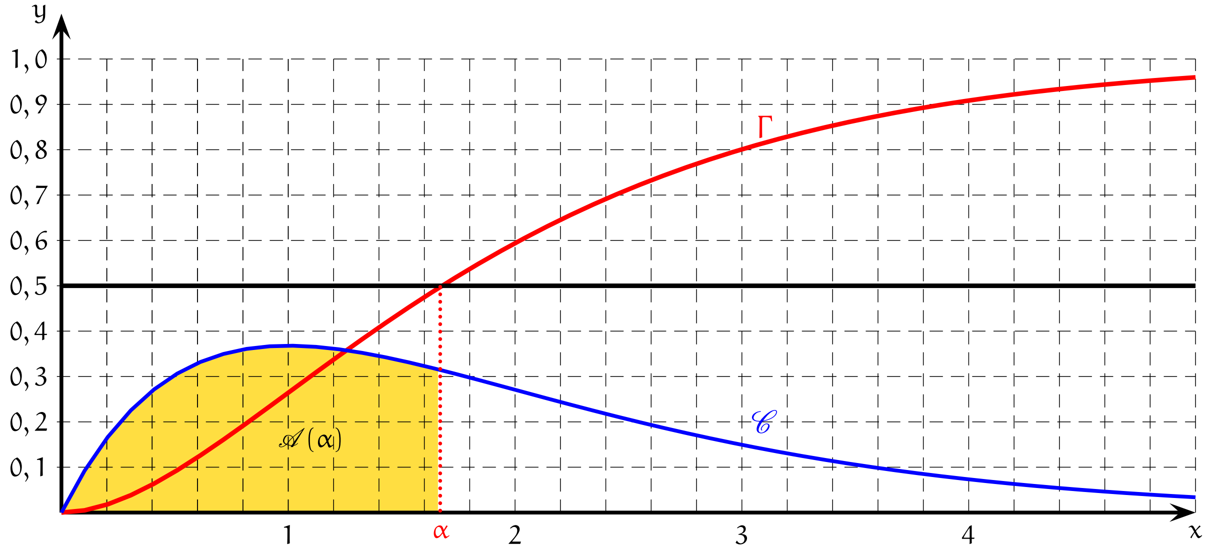
$$\boxed{\text{la fonction } \mathscr{A} \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

2) L'aire du « domaine infini » délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Cela signifie que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t) = 1$.

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t) = 1.}$$

3) a) La fonction $\mathscr{A}$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[\mathscr{A}(0), \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t)\right[= [0, 1[$, l'équation $\mathscr{A}(t) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. Puisque $\dfrac{1}{2} \in [0, 1[$, l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$.

b) Graphique. La fonction $\mathscr{A}$est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc la courbe rouge. Sur le graphique, on lit : $\alpha = 1,6$ à 10^{-1} près.



4) a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$g'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-1) \times e^{-x} = (1 - x - 1)e^{-x} = -xe^{-x} = -f(x).$$

b) Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0, +\infty[$,

$$\mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\, dx = [-g(x)]_0^t = (-(t+1)e^{-t}) - (-(0+1)e^0) = 1 - (t+1)e^{-t}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \geqslant 0,\ \mathscr{A}(t) = 1 - (t+1)e^{-t}.}$$

c) $\mathscr{A}(6) = 1 - 7e^{-6} = 0,98$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 4. Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) $u_0 = |z_0| = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$

$$\boxed{u_0 = 2.}$$

2) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = |1 + i| \times |z_n| = \sqrt{1^2 + 1^2}\, u_n = \sqrt{2}\, u_n.$$

Donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la suite géométrique de premier terme } u_0 = 2 \text{ et de raison } q = \sqrt{2}.}$$

3) On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n.}$$

4) Puisque $\sqrt{2} > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$. Puisque $2 > 0$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

5) Algorithme complété.

Variables :	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p

Traitement :	Tant que $u \leqslant p$
	    Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$
	    Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher la variable n

Partie B

1) $z_1 = (1 + i)\left(\sqrt{3} - i\right) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} + 1\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right).$

$$\boxed{z_1 = \left(\sqrt{3} + 1\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right).}$$

2) $|z_0| = u_0 = 2$ puis

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\pi/6}.$$

De même,

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Par suite, $z_1 = (1 + i)z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \times 2e^{-i\pi/6} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$

$$\boxed{z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.}$$

3) Des deux questions précédentes, on déduit

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)i = \left(\sqrt{3}+1\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right).$$

En identifiant les parties réelles, on obtient $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}+1$ ou encore

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

