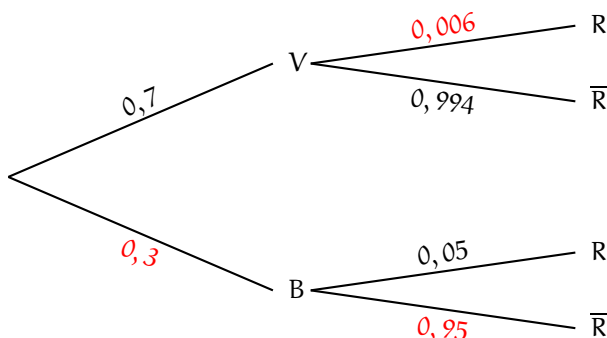


# Liban 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

## EXERCICE 1

### Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2)  $p(V \cap R) = p(V) \times p_V(R) = p(V) \times (1 - p_V(\bar{R})) = 0,7 \times (1 - 0,994) = 0,0042.$

$$p(V \cap R) = 0,0042.$$

3) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(R) &= p(V \cap R) + p(B \cap R) = p(V) \times (1 - p_V(\bar{R})) + (1 - p(V)) \times p_B(R) \\ &= 0,0042 + (1 - 0,7) \times 0,05 = 0,0042 + 0,015 = 0,0192. \end{aligned}$$

$$p(R) = 0,0192.$$

4) La probabilité demandée est  $p_R(B)$ .

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p_B(R)}{p(R)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,0192} = 0,78125.$$

$$p_R(B) = 0,7812 \text{ arrondi au dix millième.}$$

### Partie B : le vélo

1) La probabilité demandée est  $p(15 \leq T \leq 20)$ . La calculatrice fournit

$$p(15 \leq T \leq 20) = 0,946 \text{ arrondi au dix millième.}$$

2) La probabilité demandée est  $p(T > 20)$  qui est aussi  $p(T \geq 20)$ . La calculatrice fournit

$$p(T > 20) = 0,0062 \text{ arrondi au dix millième.}$$

3) On cherche d'abord le réel  $t$  tel que  $p(T \leq t) = 0,9$ . La calculatrice fournit  $t = 18,5 \dots$  minutes. En arrondissant à la minute de manière à être sûr de ne pas être en retard, on obtient une durée de 19 min. L'élève doit donc partir à 8 h 00 moins 19 min ou encore l'élève doit partir à 7 h 41 au plus tard.

### Partie C : le bus

1) On sait que la variable aléatoire  $Z'$  suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

2) Tout d'abord,

$$\begin{aligned}T' \leq 20 &\Leftrightarrow T' - 15 \leq 5 \Leftrightarrow \frac{T' - 15}{\sigma'} \leq \frac{5}{\sigma'} \\ &\Leftrightarrow Z' \leq \frac{5}{\sigma'},\end{aligned}$$

puis

$$p(T' \geq 20) = 0,05 \Leftrightarrow p(T' \leq 20) = 0,95 \Leftrightarrow p\left(Z' \leq \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,95.$$

Soit  $a$  est le réel tel que  $p(Z' \leq a) = 0,95$ . Alors,

$$p\left(Z' \leq \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \frac{5}{\sigma'} = a \Leftrightarrow \sigma' = \frac{5}{a}.$$

La calculatrice fournit

$$\sigma' = 3,04 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

**EXERCICE 2**

<b>Proposition 1</b>	<b>VRAI</b>
<b>Proposition 2</b>	<b>VRAI</b>
<b>Proposition 3</b>	<b>FAUX</b>
<b>Proposition 4</b>	<b>FAUX</b>
<b>Proposition 5</b>	<b>VRAI</b>

**Justification 1** Notons  $\Delta$  la droite de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

$t = 2$  fournit le point A et  $t = 1$  fournit le point B. Donc les points A et B appartiennent à la droite  $\Delta$  ou encore  $\Delta$  est la droite (AB). Donc la proposition 1 est vraie.

**Justification 2** Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est le vecteur  $\vec{u}(2, 1, 3)$  et un vecteur directeur de (AB) est  $\vec{u}'(-2, 1, 1)$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 2 \times (-2) + 1 \times 1 + 3 \times 1 = 0.$$

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonaux ou encore les droites  $\mathcal{D}$  et (AB) sont orthogonales. La proposition 2 est vraie.

**Justification 3** Puisque  $\mathcal{D}$  et (AB) sont orthogonales,  $\mathcal{D}$  et (AB) ne sont pas parallèles et sont donc soit sécantes soit non coplanaires.

Soient  $M(2t, 1 + t, -5 + 3t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de  $\mathcal{D}$  et  $N(5 - 2u, -1 + u, -2 + u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , un point de (AB).

$$\begin{aligned} M = N &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 5 - 2u \\ 1 + t = -1 + u \\ -5 + 3t = -2 + u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = t + 2 \\ 2t = 5 - 2(t + 2) \\ -5 + 3t = -2 + (t + 2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = t + 2 \\ 4t = 1 \\ 2t = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites  $\mathcal{D}$  et (AB) n'ont aucun point commun. Par suite, les droites  $\mathcal{D}$  et (AB) ne sont pas coplanaires. La proposition 3 est fautive.

**Justification 4** Soit  $M(2t, 1 + t, -5 + 3t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de  $\mathcal{D}$ .

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (2t) - (1 + t) + 3(-5 + 3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 10t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}.$$

Ceci montre déjà que la droite  $\mathcal{D}$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont sécants en un point. Pour  $t = \frac{3}{2}$ , on obtient le point de coordonnées  $\left(3; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ . Donc, la proposition 4 est fautive.

**Justification 5** Un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$  est le vecteur  $\vec{n}(1, -1, 3)$ . Les plans  $\mathcal{P}$  et (ABC) sont parallèles si et seulement si le vecteur  $\vec{n}$  est aussi un vecteur normal au plan (ABC).

Le vecteur  $\vec{AB}$  a pour coordonnées  $(2, -1, -1)$  et le vecteur  $\vec{AC}$  a pour coordonnées  $(6, 0, -2)$ .

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 6 + (-1) \times 0 + 3 \times (-2) = 0.$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Donc, le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan (ABC) puis les plans  $\mathcal{P}$  et (ABC) sont parallèles. La proposition 5 est vraie.

### EXERCICE 3

#### Partie A

1)  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $[0, +\infty[$  et pour tout réel  $x \geq 0$ ,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

Pour tout réel  $x$  de  $[0, +\infty[$ ,  $e^{-x} > 0$ . Donc, pour tout réel  $x$  de  $[0, +\infty[$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $1 - x$ . On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f$	0	$e^{-1}$	

2) Pour tout réel  $x > 0$ ,  $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}$ .

Un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ . En prenant l'inverse, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0 \text{ et donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

#### Partie B

1) La fonction  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . On sait alors que la fonction  $\mathcal{A}$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et que pour tout réel  $t$  de  $[0, +\infty[$ ,  $\mathcal{A}'(t) = f(t) = te^{-t}$ . Puisque la fonction  $f$  est strictement positive sur  $]0, +\infty[$  et s'annule en 0, on en déduit que

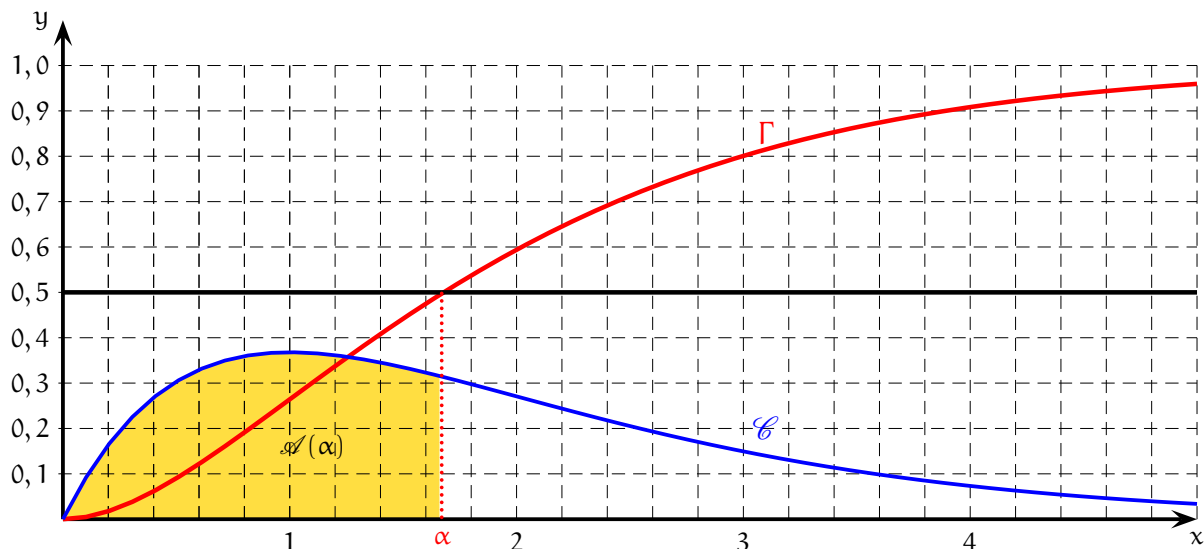
la fonction  $\mathcal{A}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2) L'aire du « domaine infini » délimité par la courbe  $\mathcal{C}$  et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Cela signifie que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t) = 1$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t) = 1.$$

3) a) La fonction  $\mathcal{A}$  est continue (car dérivable) et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . On sait alors que pour tout réel  $k$  de  $\left[ \mathcal{A}(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t) \right] = [0, 1[$ , l'équation  $\mathcal{A}(t) = k$  admet une solution et une seule dans  $[0, +\infty[$ . Puisque  $\frac{1}{2} \in [0, 1[$ , l'équation  $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}$  admet une solution et une seule dans  $[0, +\infty[$ .

b) **Graphique.** La fonction  $\mathcal{A}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . Sa courbe représentative est donc la courbe rouge. Sur le graphique, on lit :  $\alpha = 1,6$  à  $10^{-1}$  près.



4) a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $[0, +\infty[$  et pour tout réel  $x$  de  $[0, +\infty[$ ,

$$g'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-1) \times e^{-x} = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x} = -f(x).$$

b) Puisque la fonction  $f$  est continue et positive sur  $[0, +\infty[$ ,

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x) \, dx = [-g(x)]_0^t = -(t+1)e^{-t} - -(0+1)e^0 = 1 - (t+1)e^{-t}.$$

Pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{A}(t) = 1 - (t+1)e^{-t}$ .

c)  $\mathcal{A}(6) = 1 - 7e^{-6} = 0,98$  à  $10^{-2}$  près.

### EXERCICE 4. Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) Le jour 1, 5 % des individus tombent malades, aucun ne peut encore guérir et donc 95 % des individus sont encore sains. Donc,

$$a_1 = 0,95, b_1 = 0,05 \text{ et } c_1 = 0.$$

2) a) 5 % des individus sains tombent malades le jour suivant et donc 95 % d'individus sains restent sains d'un jour au jour suivant.

On en déduit que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,95a_n$ .

b) Le  $n + 1$ -ème jour, 5 % de la population saine s'est rajoutée à la population de malades et 20 % de la population de malades a guéri. Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$b_{n+1} = b_n + 0,05a_n - 0,2b_n = 0,05a_n + 0,8b_n.$$

3) a) Soit  $n$  un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a_n \\ 0,05a_n + 0,8b_n \\ 0,2b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = AU_n.$$

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

• Pour  $n = 0$ ,  $\begin{pmatrix} 0,95^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = D^0$ . L'égalité est donc vraie quand  $n = 0$ .

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors

$$D^{n+1} = D^n \times D = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

4) a) Soit  $n$  un entier naturel.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) \\ \times \end{pmatrix}.$$

On a montré que pour tout entier naturel  $n$ ,  $b_n = \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n)$ .

b) Puisque  $-1 < 0,95 < 1$  et  $-1 < 0,8 < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3}(0 - 0) = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

c) Algorithme modifié.

<b>Variables :</b>	b, b', x et y sont des entiers réels k est un entier naturel
<b>Initialisation :</b>	Affecter à b la valeur 0 Affecter à b' la valeur 0,05 Affecter à k la valeur 0 Affecter à x la valeur 0,95 Affecter à y la valeur 0,8
<b>Traitement :</b>	Tant que b < b', faire Affecter à k la valeur k + 1 Affecter à b la valeur b' Affecter à x la valeur 0,95x Affecter à y la valeur 0,80y Affecter à b' la valeur $(x - y)/3$ Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher k

Tableau complété.

	k	b	c	d	b'	Test : b < b' ?
Après le 7 <sup>ème</sup> passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8 <sup>ème</sup> passage éventuel dans la boucle Tant que	8	0,1652	0,1342	0,6302	0,1653	VRAI
Après le 9 <sup>ème</sup> passage éventuel dans la boucle Tant que	9	0,1653	0,5987	0,1073	0,1637	FAUX

Le nombre de malades au 9-ème jour est donc strictement supérieur au nombre de malades au 8-ème jour. Le pic épidémique est atteint le 8-ème jour.