France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) $f_1(0) = 0 + e^0 = 1$ et donc $\mathscr{C}_1$ passe par le point $A(0,1)$.

2) Dérivée de f_1. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 + (-1) \times e^{-x} = 1 - e^{-x}.$$

Variations de f_1. Soit x un réel.

- Si $x < 0$, $-x > 0$ puis $e^{-x} > 1$ et donc $1 - e^{-x} < 0$.
- Si $x = 0$, $e^{-x} = 1$ et donc $1 - e^{-x} = 0$.
- Si $x > 0$, $-x < 0$ puis $e^{-x} < 1$ et donc $1 - e^{-x} > 0$.

En résumé, la fonction f_1' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0. On en déduit que la fonction f_1 est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

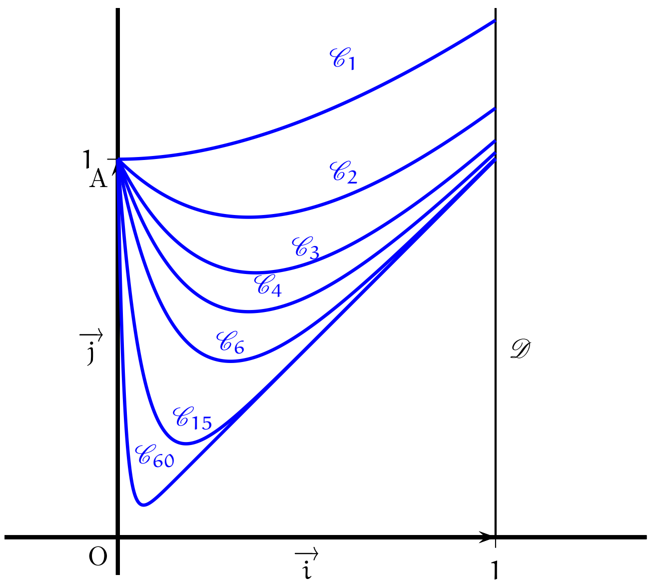
Limite de f_1 en $-\infty$. Pour tout réel x, $f_1(x) = e^{-x}(xe^x + 1)$.
D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x + 1) = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$.

Limite de f_1 en $+\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

On peut dresser le tableau de variation de la fonction f_1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B



1) a) Soit n un entier naturel. La fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$. Donc, I_n est l'aire, exprimée en unités d'aire du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_n$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

b) Il semble que cette aire diminue quand n augmente et donc il semble que la suite (I_n) soit une suite décroissante. D'autre part, il semble que l'aire I_n tende vers l'aire du triangle de sommets de coordonnées respectives $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$ ou encore il semble que I_n tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right) dx - \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left(x + e^{-(n+1)x}\right) - \left(x + e^{-nx}\right)\right) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right) dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x} \left(1 - \frac{e^{-nx}}{e^{-(n+1)x}}\right) dx \\
&= \int_0^1 e^{-(n+1)x} \left(1 - e^{-nx+(n+1)x}\right) dx \\
&= \int_0^1 e^{-(n+1)x} \left(1 - e^x\right)\ dx.
\end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $e^x \geqslant 1$ et donc $1 - e^x \leqslant 0$. D'autre part, pour tout réel x de $[0, 1]$, $e^{-(n+1)x} \geqslant 0$. On en déduit que pour tout réel x de $[0, 1]$, $e^{-(n+1)x}(1 - e^x) \leqslant 0$.

Par positivité de l'intégrale, on obtient $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et donc $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 (car chaque I_n est une aire). On en déduit que la suite (I_n) est convergente.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-n}}{-n}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{e^0}{-n}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{ne^n} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^n = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{ne^n} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. On en déduit que

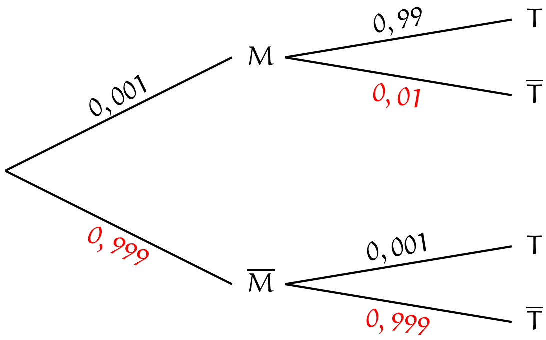
$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}.}$$

EXERCICE 2

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}p(T) &= p\left(M\cap T\right) + p\left(\overline{M}\cap T\right) = p(M)\times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right)\times p_{\overline{M}}(T)\\ &= 0,001\times 0,99 + (1-0,001)\times 0,001 = 0,00099 + 0,000999\\ &= 0,001989 = 1,989\times 10^{-3}.\end{aligned}$$

$$\boxed{p(T) = 1,989\times 10^{-3}.}$$

c) L'affirmation de l'énoncé s'écrit encore $p_T(M) < 0,5$. Or

$$p_T(M) = \frac{p(M\cap T)}{p(T)} = \frac{p(M)\times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,001\times 0,99}{0,001989} = 0,497\ldots.$$

Donc $p_T(M) < 0,5$ et l'affirmation de l'énoncé est vraie.

2) La proportion de personnes malades n'est plus $0,1$ % mais x. Puisque $p(M) = x$, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$p(T) = p(M)\times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right)\times p_{\overline{M}}(T) = 0,99x + 0,001(1-x) = 0,989x + 0,001.$$

On en déduit que

$$p_T(M) = \frac{p(M\cap T)}{p(T)} = \frac{p(M)\times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,99x}{0,989x+0,001}.$$

On veut que $p_T(M) \geqslant 0,95$.

$$\begin{aligned}p_T(M)\geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \frac{0,99x}{0,989x+0,001}\geqslant 0,95 \Leftrightarrow 0,99x\geqslant 0,95(0,989x+0,001)\Leftrightarrow 0,99x\geqslant 0,93955x+0,00095\\ &\Leftrightarrow 0,05045x\geqslant 0,00095\Leftrightarrow x\geqslant\frac{0,00095}{0,05045}\\ &\Leftrightarrow x\geqslant 0,0188\ldots\end{aligned}$$

En arrondissant à 10^{-3}, le laboratoire commercialise le test quand la proportion de personnes malades dépasse $1,9\,\%$.

Partie B

1) a) La probabilité demandée est $p(890\leqslant X\leqslant 920)$. La calculatrice fournit $p(890\leqslant X\leqslant 920) = 0,92$ arrondi à 10^{-2}.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un comprimé soit conforme est } 0,92 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

b) Pour des raisons de symétrie, $p(X \leqslant 900 - h) = p(X \geqslant 900 + h)$. Donc,

$$p(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) = 1 - p(X \leqslant 900 - h) - p(X \geqslant 900 + h) = 1 - 2p(X \leqslant 900 - h),$$

puis $p(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) = 0,99$ à 10^{-3} près équivaut à $1 - 2p(X \leqslant 900 - h) = 0,99$ à 10^{-3} près ce qui fournit encore $p(X \leqslant 900 - h) \approx 0,005$.

La calculatrice donne $900 - h = 881,969\ldots$ et donc $h = 18,03\ldots$ ou encore $h \approx 18$.

2) Ici, on suppose que $p = 0,97$. D'autre part, $n = 1000$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 970 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 30 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,97 - 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}, 0,97 + 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,959, 0,981]$. La fréquence observée de comprimés conformes est

$$f = \frac{1000 - 53}{1000} = 0,947.$$

f n'appartient pas l'intervalle de fluctuation. Donc, le contrôle remet en question les réglages faits par le laboratoire au risque de se tromper de 5 %.

EXERCICE 3

1) Le discriminant de l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = -3 \times 16 < 0$.

L'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir

$$Z_1 = \frac{-4 + i\sqrt{3 \times 16}}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3}$$

et $Z_2 = \overline{Z_1} = -2 - 2i\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } Z^2 + 4Z + 16 = 0 \text{ sont } Z_1 = -2 + 2i\sqrt{3} \text{ et } Z_2 = \overline{Z_1} - 2 - 2i\sqrt{3}.}$$

$|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$ puis

$$Z_1 = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

et $Z_2 = \overline{Z_1} = 4e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

$$\boxed{Z_1 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } Z_2 = 4e^{-\frac{2i\pi}{3}}.}$$

2) $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ puis

$$a^2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

Soit alors z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} &\Leftrightarrow z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (z - a)(z + a) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = a \text{ ou } z = -a \Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ ou } z = -1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \text{ sont } a = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } -a = -1 - i\sqrt{3}.}$$

3) Restitution organisée de connaissances

a) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Posons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ où x_1, x_2, y_1 et y_2 sont quatre réels.

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \overline{z_1z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2} \\ &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Par suite, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

b) Soit z un nombre complexe z. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

- $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$. Donc, l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ et montrons que $\overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \overline{z^{n+1}} &= \overline{z \times z^n} \\ &= \overline{z} \times \overline{z^n} \text{ (d'après a))} \\ &= \overline{z} \times (\overline{z})^n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\overline{z})^{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4) Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Rightarrow z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \Rightarrow \overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0} \\ &\Rightarrow \overline{z}^4 + 4\overline{z}^2 + 16 = 0 \\ &\Rightarrow \overline{z} \text{ solution de } (E). \end{aligned}$$

Maintenant (a ayant été défini à la question 2)), $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ puis $a^2 = 2^2 e^{2\times\frac{i\pi}{3}} = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} = Z_1$ (où Z_1 a été défini à la question 1)). Par suite,

$$a^4 + 4a^2 + 16 = \left(a^2\right)^2 + 4a^2 + 16 = (Z_1)^2 + 4Z_1 + 16 = 0.$$

Ainsi, a est solution de l'équation (E). $-a$ est aussi solution car $(-a)^4 + 4(-a)^2 + 16 = a^4 + 4a^2 + 16 = 0$. D'après le début de la question 4), $\overline{a}$ et $\overline{-a} = -\overline{a}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

En résumé, les quatres nombres $1 + i\sqrt{3}$, $-1 - i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$ sont solutions de l'équation (E). Or, ces quatre nombres sont deux à deux distincts et, d'après le résultat admis par l'énoncé, l'équation (E) admet au plus quatre solutions. Donc,

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ est } \left\{1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\right\}.}$$

EXERCICE 4. Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) L'année 0, le bassin A contient 200 poissons et le bassin B contient 100 poissons ou encore $a_0 = 200$ et $b_0 = 100$. L'année 1, le bassin B est vidé puis les 200 poissons du bassin A passent dans le bassin B et on rajoute 100 poissons dans le bassin B. Donc, $b_1 = 200 + 100 = 300$.
D'autre part, la vente des 100 poissons du bassin B permet l'achat de 200 poissons que l'on met dans le bassin A auxquels on ajoute encore 200 poissons. Donc $a_1 = 200 + 200 = 400$.

De même, $a_2 = 2b_1 + 200 = 800$ et $b_2 = a_1 + 100 = 500$.

$$\boxed{a_1 = 400,\ b_1 = 300,\ a_2 = 800 \text{ et } b_2 = 500.}$$

2)a) Soit n un entier naturel. Le nombre de poissons du bassin A l'année $n+1$ est le double du nombre de poissons du bassin B l'année n augmenté de 200. Donc, $a_{n+1} = 2b_n + 200$.
De même, le nombre de poissons du bassin B l'année $n+1$ est le nombre de poissons du bassin A l'année n augmenté de 100. Donc, $b_{n+1} = a_n + 100$. Par suite,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 200 \\ a_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &= AX_n + B. \end{aligned}$$

b) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y + 200 \\ y = x + 100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y + 200 \\ y = (2y + 200) + 100 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -300 \\ x = -400 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

c) Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $x = -400$ et $y = -300$. Soit n un entier naturel.

$$Y_{n+1} = X_{n+1} - X = (AX_n + B) - (AX + B) = A(X_n - X) = AY_n.$$

3) a) Soit n un entier naturel.

$$Z_{n+1} = Y_{2n+2} = AY_{2n+1} = A \times A \times Y_{2n} = A^2 Z_n.$$

Or, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et donc

$$Z_{n+1} = A^2 Z_n = 2I_2 Z_n = 2Z_n.$$

b) Soit n un entier naturel. Puisque $Y_{2n} = 2^n Z_0$ avec $Z_0 = Y_0$,

$$Y_{2n+1} = AY_{2n} = A \times 2^n Z_0 = 2^n AY_0 = 2^n Y_1.$$

Ensuite,

$$\begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = Y_{2n} = 2^n Y_0 = 2^n \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $a_{2n} + 400 = 600 \times 2^n$ puis $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$. On a aussi

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} a_1 + 400 \\ b_1 + 400 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \end{pmatrix}$$

et donc $a_{2n+1} + 400 = 800 \times 2^n$ puis $a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \text{ et } a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.}$$

4) a) Si $p = 2n$, alors p est pair et $n = \dfrac{p}{2}$. Dans ce cas, l'algorithme affiche la valeur $600 \times 2^n - 400$ qui est $a_{2n} = a_p$.
Si $p = 2n + 1$, alors p est impair et $n = \dfrac{p-1}{2}$. Dans ce cas, l'algorithme affiche la valeur $800 \times 2^n - 400$ qui est $a_{2n+1} = a_p$.

Dans tous les cas, l'algorithme affiche a_p une fois qu'on a rentré une valeur de p.

b) Algorithme modifié.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Affecter à p la valeur 0. Affecter à a la valeur 200.

Traitement :	Tant que $a \leqslant 10000$ faire
	    Affecter à p la valeur $p+1$.
	    Si p est pair
	        Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	        Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	    Sinon
	        Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	        Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	    Fin de Si.
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher p.

