Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

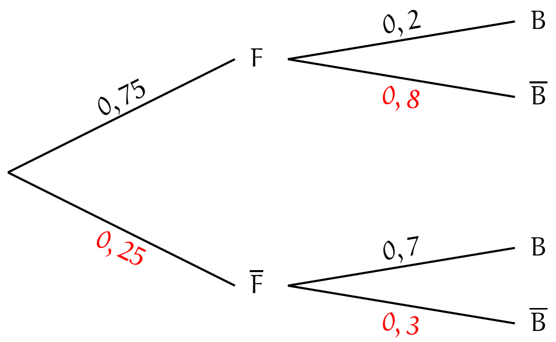
EXERCICE 1

1)	**réponse c)**
2)	**réponse d)**
3)	**réponse c)**
4)	**réponse a)**

Explication 1

Notons F l'événement : « le client est une femme » et B l'événement « le client achète un article au rayon bricolage ».

L'énoncé donne $p(F) = 0,75$, $p_F(B) = 0,2$ et $p_{\overline{F}}(B) = 0,7$. On veut calculer $p_B(F)$. Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(B) &= p(F \cap B) + p\left(\overline{F} \cap B\right) = p(F) \times p_F(B) + p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(B) \\ &= 0,75 \times 0,2 + (1 - 0,75) \times 0,7 = 0,325. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$p_B(F) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)} = \frac{p(F) \times p_F(B)}{p(B)} = \frac{0,75 \times 0,2}{0,325} = 0,462 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse c.

Explication 2

Notons X le nombre de personnes ayant acheté le modèle d'odinateur. X suit une loi binomiale. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le client achète le modèle d'ordinateur » avec une probabilité $p = 0,3$ et « le client n'achète pas le modèle d'ordinateur » avec une probabilité $1 - p = 0,7$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$. La calculatrice fournit

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7 = 0,267 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse d.

Explication 3

Notons X la variable aléatoire considérée. Pour tout réel t, on a

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$p(X \geqslant t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{8}}.$$

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 6)$.

$$p(X \geqslant 6) = e^{-\frac{6}{8}} = e^{-0,75} = 0,472 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse c.

Explication 4

Notons X la variable aléatoire considérée. X suit la loi normale de paramètres $\mu = 200$ et d'écart-type noté σ. Posons $Z = \dfrac{X - 200}{\sigma}$. On sait que la variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite.
L'énoncé donne $p(184 \leqslant X \leqslant 216) = 0,954$. Or,

$$184 \leqslant X \leqslant 216 \Leftrightarrow -16 \leqslant X - 200 \leqslant 16 \Leftrightarrow -\frac{16}{\sigma} \leqslant \frac{X - 200}{\sigma} \leqslant \frac{16}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{16}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{16}{\sigma}.$$

L'égalité $p\left(-\dfrac{16}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{16}{\sigma}\right) = 0,954$ fournit encore $p\left(Z \leqslant \dfrac{16}{\sigma}\right) = 0,954 + \dfrac{1 - 0,954}{2} = 0,977$. La calculatrice fournit alors $\dfrac{16}{\sigma} = 2$ arrondi à 10^{-2} puis $\sigma \approx 8$.

L'énoncé demande alors $p(X \leqslant 192)$. La calculatrice fournit $p(X \leqslant 192) = 0,16$ arrondie au centième. La bonne réponse est la réponse a.

EXERCICE 2

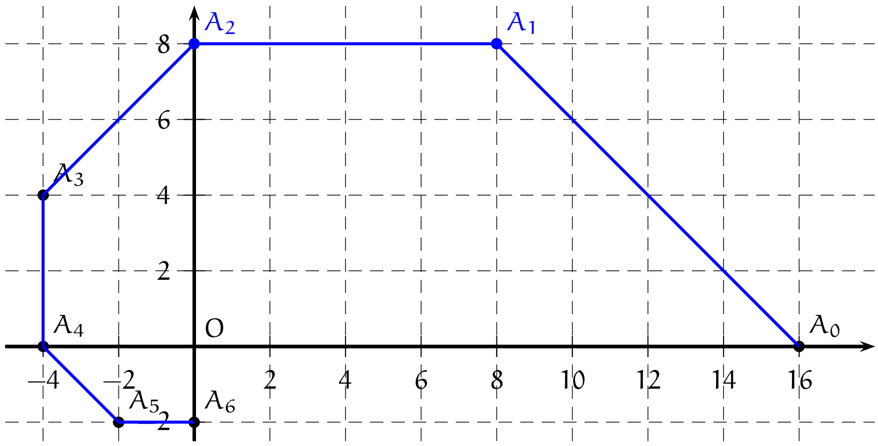
1) a) • $z_1 = \dfrac{1+i}{2} \times 16 = 8+8i$.

• $z_2 = \dfrac{1+i}{2} \times (8+8i) = 4(1+i)^2 = 4(1+2i-1) = 8i$.

• $z_3 = \dfrac{1+i}{2} \times 8i = 4i(1+i) = -4+4i$.

$$\boxed{z_1 = 8+8i,\ z_2 = 8i \text{ et } z_3 = -4+4i.}$$

b)Figure.



c) $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{|1+i|}{2} = \dfrac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ puis

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\boxed{\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

d)

$$OA_1 = |z_1| = |8+8i| = 8|1+i| = 8\sqrt{1^2+1^2} = 8\sqrt{2}$$

et

$$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8+8i-16| = |-8+8i| = 8|-1+i| = 8\sqrt{(-1)^2+1^2} = 8\sqrt{2}.$$

Donc, $OA_1 = A_0A_1 = 8\sqrt{2}$ et le triangle OA_0A_1 est isocèle en A_1.

D'autre part, $OA_0 = |z_0| = |16| = 16$ puis

$$A_1O^2 + A_1A_0^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 128+128 = 256 = 16^2 = 0A_0^2.$$

D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1. Finalement

$$\boxed{\text{le triangle } OA_0A_1 \text{ est isocèle rectangle en } A_1.}$$

2) Soit n un entier naturel. D'après la question 1)c),

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n.$$

Ceci montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Puisque $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que la suite (r_n) est-elle convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$. Géométriquement cela signifie que la distance du point O au point A_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} A_nA_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2}z_n - z_n\right| = \left|\frac{1+i}{2} - 1\right| \times |z_n| = \left|\frac{-1+i}{2}\right| \times r_n = \frac{|-1+i|}{2} \times r_n \\ &= \frac{\sqrt{(-1)^2+1^2}}{2} r_n = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \\ &= r_{n+1} \text{ (d'après la question 2)).} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : A_nA_{n+1} = r_{n+1}.}$$

b) Puisque la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $r_0 = 16$ et de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on sait que pour tout entier naturel n,

$$r_n = r_0 \times q^n = 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

Soit alors n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} L_n &= A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n \text{ (d'après la question 3)a))} \\ &= 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \ldots + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \\ &= 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &= 8\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 8\sqrt{2} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} &= \frac{16\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{16}{\sqrt{2}-1} = \frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} \\ &= \frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = 16\left(\sqrt{2}+1\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ L_n = 16\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right).}$$

c) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} L_n = 16\left(\sqrt{2}+1\right).}$$

EXERCICE 3

Partie A

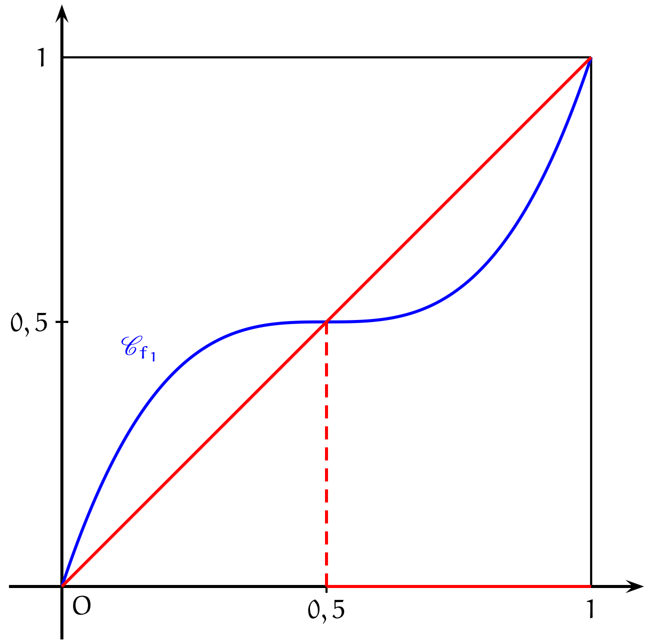
1) a) • $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$.
• La fonction f_1 est continue sur $[0, 1]$ en tant que fonction polynôme.
• La fonction f_1 est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2.$$

La fonction f_1' est positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction f_1 est croissante sur $[0, 1]$.

On a montré que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b) Résolution graphique de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$.



En notant que $f_1(0, 5) = 0, 5$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$ est $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ceci signifie que les gris clairs (codés par un réel x inférieur à $0, 5$) sont assombris et les gris foncés (codés par un réel x supérieur à $0, 5$) sont éclaircis.

2) a) Pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, $1 + (e - 1)x \geqslant 1$ et en particulier, $1 + (e - 1)x > 0$. On en déduit que la fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$g'(x) = \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \frac{(e-1) - (1+(e-1)x)}{1+(e-1)x} = \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1],\ g'(x) = \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}.}$$

b) Pour tout réel de $[0, 1]$, $1 + (e - 1)x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0, 1]$, $g'(x)$ est du signe de $(e - 2) - (e - 1)x$. Or,

$$\begin{aligned}(e-2)-(e-1)x > 0 &\Leftrightarrow (e-2) > (e-1)x \\ &\Leftrightarrow \frac{e-2}{e-1} > x \text{ (car } e - 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow x < \frac{e-2}{e-1}.\end{aligned}$$

De même, $(e - 2) - (e - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e-2}{e-1}$ avec $\frac{e-2}{e-1} = 0,418\ldots$ On note que $\frac{e-2}{e-1} \in [0, 1]$. De plus,

$$\begin{aligned}g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) &= \ln\left(1 + (e-1)\frac{e-2}{e-1}\right) - \frac{e-2}{e-1} = \ln(e-1) - \frac{e-2}{e-1} \\ &= 0, 12 \text{ (arrondie au centième).}\end{aligned}$$

On peut dresser le tableau de variations de la fonction g.

x	0		$\dfrac{e-2}{e-1}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,12\ldots$	$\searrow$	0

On a montré en particulier que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{e-2}{e-1}\right]$. Donc, pour tout réel k de $\left[g(0), g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right)\right] = [0; 0,12\ldots]$, l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution dans $\left[0, \dfrac{e-2}{e-1}\right]$. En particulier, puisque $0,05 \in [0; 0,12\ldots]$, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution notée α dans $\left[0, \dfrac{e-2}{e-1}\right]$ et même dans $\left]0, \dfrac{e-2}{e-1}\right[$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{e-2}{e-1}, 1\right]$. Donc, pour tout réel k de $\left[g(1), g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right)\right] = [0; 0,12\ldots]$, l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution dans $\left[\dfrac{e-2}{e-1}, 1\right]$. En particulier, puisque $0,05 \in [0; 0,12\ldots]$, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution notée β dans $\left[\dfrac{e-2}{e-1}, 1\right]$ et même dans $\left]\dfrac{e-2}{e-1}, 1\right[$.

Partie B

1) L'algorithme analyse les 101 nuances de gris codées 0, $0,01$, $0,02$, $\ldots$, $0,99$ et 1. Le compteur c dénombre les nuances de gris où la modification sera effectivement perceptible. C'est ce qu'affiche l'algorithme.

2) On rappelle que $0,08 < \alpha < 0,09$ et que $0,85 < \beta < 0,86$. Le tableau de variations de la fonction g établi à la question 2)b) de la partie A montre que la modification est perceptible quand $x \in [\alpha, \beta]$. Donc, l'algorithme compte les valeurs $0,09$, $0,10$, $0,11$, $\ldots$, $0,84$, $0,85$.

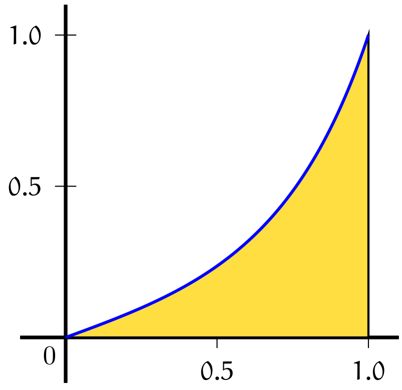
Il revient au même de compter le nombre d'entiers compris au sens large entre 9 et 85. Il y a 85 entiers compris au sens large entre 1 et 85 et 8 entiers compris au sens large entre 1 et 8. Il y a donc $85 - 8 = 77$ entiers compris au sens large entre 9 et 85.

Si on l'applique à la fonction f_2, l'algorithme affichera 77.

Partie C

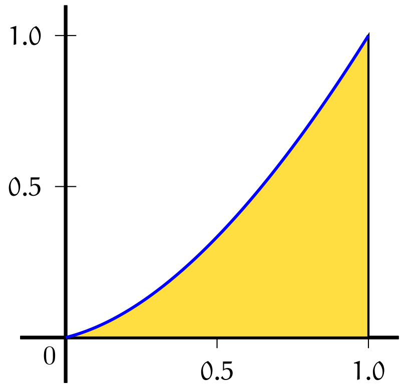
1) a) La fonction f_1 est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{f_1} &= \int_0^1 xe^{x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,32 \text{ (arrondi à } 10^{-2}\text{)}.\end{aligned}$$



b) La fonction f_2 est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc

$$\mathscr{A}_{f_2} = \int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right) dx = \left[2x^2 - 15x + 60\ln(x+4)\right]_0^1 = -13 + 60\ln(5) - 60\ln(4)$$
$$= -13 + 60\ln\left(\frac{5}{4}\right) = -13 + 60\ln(1,25) = 0,39 \text{ (arrondi à } 10^{-2}\text{)}.$$



2) Donc, la fonction f_1 est celle qui éclaircit le plus l'image.

EXERCICE 4. Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(1, -2, -5)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(2, -1, -4)$.
S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$, alors $k = 2$ (à partir de la première coordonnée) et $-1 = -2k$ ou encore $k = \frac{1}{2}$ (à partir de la deuxième coordonnée). Ceci est imposssible et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

2) a) $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par exemple. Or

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = 1 \times 1 + (-2) \times b + (-5) \times c = 1 - 2b - 5c$$

et

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u} = 2 \times 1 + (-1) \times b + (-4) \times c = 2 - b - 4c,$$

puis

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \text{ normal à } (ABC) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - 2b - 5c = 0 \\ 2 - b - 4c = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -4c + 2 \\ 1 - 2(-4c + 2) - 5c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3c - 3 = 0 \\ b = -4c + 2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = 1 \\ b = -2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur } \overrightarrow{u}(1, -2, 1).}$$

b) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(1, 2, 7)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(1, -2, 1)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $1 \times (x - 1) + (-2) \times (y - 2) + 1 \times (z - 7) = 0$ ou encore $x - 2y + z - 4 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan (ABC) est : } x - 2y + z - 4 = 0.}$$

c) $x_D - 2y_D + z_D - 4 = 3 - 2 \times (-6) + 1 - 4 = 12 \neq 0$. Donc,

$$\boxed{\text{le point D n'appartient pas au plan (ABC).}}$$

3) a) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est le vecteur de coordonnées $\overrightarrow{v}(2, -4, 2)$. On note que $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à un vecteur normal au plan (ABC) et n'est pas nul. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal au plan (ABC) et finalement que

$$\boxed{\text{la droite } \mathscr{D} \text{ est-elle orthogonale au plan (ABC).}}$$

b) En particulier, la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants en un point noté H.

Soit $M(2t + 3, -4t + 5, 2t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (2t + 3) - 2(-4t + 5) + (2t - 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow 12t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Pour $t = 1$, on obtient le point $H(5, 1, 1)$.

$$\boxed{\text{Le point H a pour coordonnées } (5, 1, 1).}$$

4) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$ sont $(1, -2, -5)$. On remarque alors que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$ (d'après la question 1)). Ainsi, la droite (DE) est parallèle à une droite du plan (ABC) et on en déduit que la droite (DE) est parallèle au plan (ABC). De plus, le point D n'appartient pas au plan (ABC) d'après la question 2)c) et donc

$$\boxed{\text{la droite (DE) est strictement parallèle au plan (ABC).}}$$

