

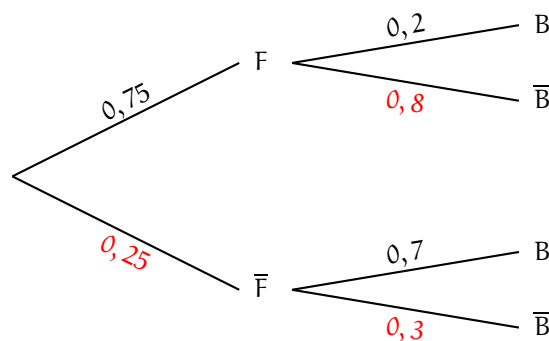
Centres étrangers 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

- 1) réponse c)
- 2) réponse d)
- 3) réponse c)
- 4) réponse a)

Explication 1

Notons F l'événement : « le client est une femme » et B l'événement « le client achète un article au rayon bricolage ». L'énoncé donne $p(F) = 0,75$, $p_F(B) = 0,2$ et $p_{\bar{F}}(B) = 0,7$. On veut calculer $p_B(F)$. Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(B) &= p(F \cap B) + p(\bar{F} \cap B) = p(F) \times p_F(B) + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(B) \\ &= 0,75 \times 0,2 + (1 - 0,75) \times 0,7 = 0,325. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$p_B(F) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)} = \frac{p(F) \times p_F(B)}{p(B)} = \frac{0,75 \times 0,2}{0,325} = 0,462 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse c.

Explication 2

Notons X le nombre de personnes ayant acheté le modèle d'ordinateur. X suit une loi binomiale. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le client achète le modèle d'ordinateur » avec une probabilité $p = 0,3$ et « le client n'achète pas le modèle d'ordinateur » avec une probabilité $1 - p = 0,7$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$. La calculatrice fournit

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7 = 0,267 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse d.

Explication 3

Notons X la variable aléatoire considérée. Pour tout réel t , on a

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = (-e^{-\lambda t}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$p(X \geq t) = 1 - p(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{8}}.$$

La probabilité demandée est $p(X \geq 6)$.

$$p(X \geq 6) = e^{-\frac{6}{8}} = e^{-0,75} = 0,472 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse c.

Explication 4

Notons X la variable aléatoire considérée. X suit la loi normale de paramètres $\mu = 200$ et d'écart-type noté σ . Posons $Z = \frac{X - 200}{\sigma}$. On sait que la variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite.

L'énoncé donne $p(184 \leq X \leq 216) = 0,954$. Or,

$$184 \leq X \leq 216 \Leftrightarrow -16 \leq X - 200 \leq 16 \Leftrightarrow -\frac{16}{\sigma} \leq \frac{X - 200}{\sigma} \leq \frac{16}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{16}{\sigma} \leq Z \leq \frac{16}{\sigma}.$$

L'égalité $p\left(-\frac{16}{\sigma} \leq Z \leq \frac{16}{\sigma}\right) = 0,954$ fournit encore $p\left(Z \leq \frac{16}{\sigma}\right) = 0,954 + \frac{1 - 0,954}{2} = 0,977$. La calculatrice fournit alors $\frac{16}{\sigma} = 2$ arrondi à 10^{-2} puis $\sigma \approx 8$.

L'énoncé demande alors $p(X \leq 192)$. La calculatrice fournit $p(X \leq 192) = 0,16$ arrondie au centième. La bonne réponse est la réponse a.

EXERCICE 2

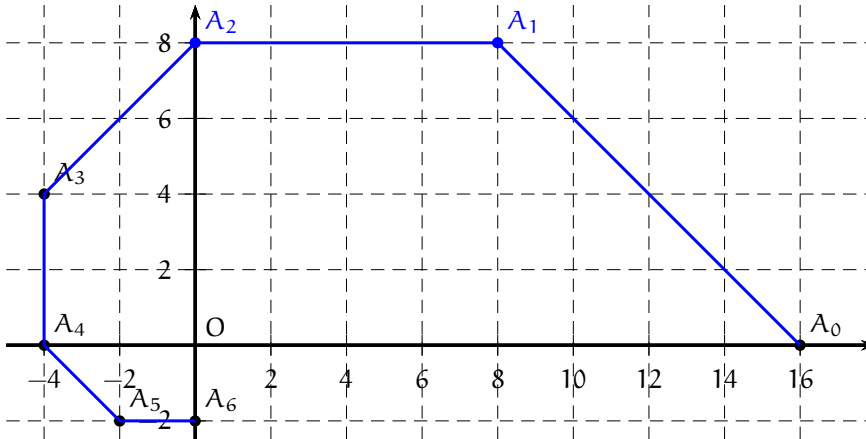
1) a) • $z_1 = \frac{1+i}{2} \times 16 = 8 + 8i$.

• $z_2 = \frac{1+i}{2} \times (8 + 8i) = 4(1+i)^2 = 4(1+2i-1) = 8i$.

• $z_3 = \frac{1+i}{2} \times 8i = 4i(1+i) = -4 + 4i$.

$$z_1 = 8 + 8i, z_2 = 8i \text{ et } z_3 = -4 + 4i.$$

b) Figure.



c) $\left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ puis

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

d)

$$OA_1 = |z_1| = |8 + 8i| = 8|1 + i| = 8\sqrt{1^2 + 1^2} = 8\sqrt{2}$$

et

$$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8 + 8i - 16| = |-8 + 8i| = 8|-1 + i| = 8\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 8\sqrt{2}.$$

Donc, $OA_1 = A_0A_1 = 8\sqrt{2}$ et le triangle OA_0A_1 est isocèle en A_1 .

D'autre part, $OA_0 = |z_0| = |16| = 16$ puis

$$A_1O^2 + A_1A_0^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 128 + 128 = 256 = 16^2 = OA_0^2.$$

D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1 . Finalement

le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2) Soit n un entier naturel. D'après la question 1)c),

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n.$$

Ceci montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Puisque $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, on sait que la suite (r_n) est-elle convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$. Géométriquement cela signifie que la distance du point O au point A_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} A_n A_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| = \left| \frac{1+i}{2} z_n - z_n \right| = \left| \frac{1+i}{2} - 1 \right| \times |z_n| = \left| \frac{-1+i}{2} \right| \times r_n = \frac{|-1+i|}{2} \times r_n \\ &= \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}}{2} r_n = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \\ &= r_{n+1} \text{ (d'après la question 2)}. \end{aligned}$$

$$\text{pour tout entier naturel } n : A_n A_{n+1} = r_{n+1}.$$

b) Puisque la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $r_0 = 16$ et de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on sait que pour tout entier naturel n ,

$$r_n = r_0 \times q^n = 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

Soit alors n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} L_n &= A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n \text{ (d'après la question 3)a)} \\ &= 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 + 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \dots + 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \\ &= 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 + \dots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \right) \\ &= 8\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2} \times \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 8\sqrt{2} \times \frac{2}{2 - \sqrt{2}} &= \frac{16\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{16}{\sqrt{2} - 1} = \frac{16(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{16(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 16(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, L_n = 16(\sqrt{2} + 1) \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right).$$

c) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 16(\sqrt{2} + 1).$$

EXERCICE 3

Partie A

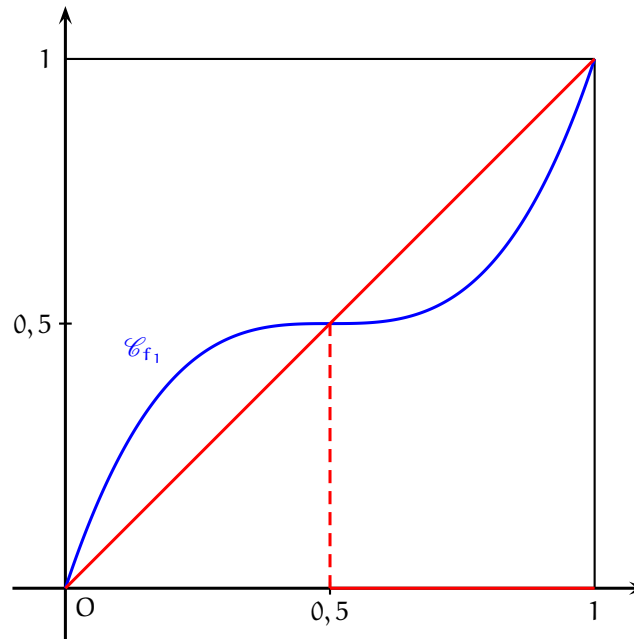
- 1) a) • $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$.
 • La fonction f_1 est continue sur $[0, 1]$ en tant que fonction polynôme.
 • La fonction f_1 est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2.$$

La fonction f_1' est positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction f_1 est croissante sur $[0, 1]$.

On a montré que la fonction f_1 est une fonction de retourche.

- b) **Résolution graphique de l'inéquation $f_1(x) \leq x$.**



En notant que $f_1(0,5) = 0,5$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f_1(x) \leq x$ est $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$.

Ceci signifie que les gris clairs (codés par un réel x inférieur à $0,5$) sont assombris et les gris foncés (codés par un réel x supérieur à $0,5$) sont éclaircis.

- 2) a) Pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$, $1 + (e - 1)x \geq 1$ et en particulier, $1 + (e - 1)x > 0$. On en déduit que la fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$g'(x) = \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \frac{(e-1) - (1+(e-1)x)}{1+(e-1)x} = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1+(e-1)x}.$$

pour tout réel x de $[0, 1]$, $g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1+(e-1)x}$.

- b) Pour tout réel de $[0, 1]$, $1 + (e - 1)x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0, 1]$, $g'(x)$ est du signe de $(e - 2) - (e - 1)x$. Or,

$$\begin{aligned} (e-2) - (e-1)x > 0 &\Leftrightarrow (e-2) > (e-1)x \\ &\Leftrightarrow \frac{e-2}{e-1} > x \text{ (car } e-1 > 0) \\ &\Leftrightarrow x < \frac{e-2}{e-1}. \end{aligned}$$

De même, $(e - 2) - (e - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e-2}{e-1}$ avec $\frac{e-2}{e-1} = 0,418\dots$ On note que $\frac{e-2}{e-1} \in [0, 1]$. De plus,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) &= \ln\left(1 + (e-1)\frac{e-2}{e-1}\right) - \frac{e-2}{e-1} = \ln(e-1) - \frac{e-2}{e-1} \\ &= 0,12 \text{ (arrondie au centième)}. \end{aligned}$$

On peut dresser le tableau de variations de la fonction g .

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	1
f'(x)	+	0	-
f	0	0,12...	0

On a montré en particulier que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{e-2}{e-1}\right]$. Donc, pour tout réel k de $\left[g(0), g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)\right] = [0; 0,12\dots]$, l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution dans $\left[0, \frac{e-2}{e-1}\right]$. En particulier, puisque $0,05 \in [0; 0,12\dots]$, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution notée α dans $\left[0, \frac{e-2}{e-1}\right]$ et même dans $\left]0, \frac{e-2}{e-1}\right[$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{e-2}{e-1}, 1\right]$. Donc, pour tout réel k de $\left[g(1), g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)\right] = [0; 0,12\dots]$, l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution dans $\left[\frac{e-2}{e-1}, 1\right]$. En particulier, puisque $0,05 \in [0; 0,12\dots]$, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution notée β dans $\left[\frac{e-2}{e-1}, 1\right]$ et même dans $\left]\frac{e-2}{e-1}, 1\right[$.

Partie B

1) L'algorithme analyse les 101 nuances de gris codées 0, 0,01, 0,02, ..., 0,99 et 1. Le compteur c dénombre les nuances de gris où la modification sera effectivement perceptible. C'est ce qu'affiche l'algorithme.

2) On rappelle que $0,08 < \alpha < 0,09$ et que $0,85 < \beta < 0,86$. Le tableau de variations de la fonction g établi à la question 2)b) de la partie A montre que la modification est perceptible quand $x \in [\alpha, \beta]$. Donc, l'algorithme compte les valeurs 0,09, 0,10, 0,11, ..., 0,84, 0,85.

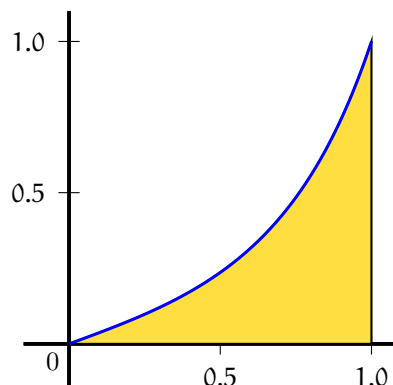
Il revient au même de compter le nombre d'entiers compris au sens large entre 9 et 85. Il y a 85 entiers compris au sens large entre 1 et 85 et 8 entiers compris au sens large entre 1 et 8. Il y a donc $85 - 8 = 77$ entiers compris au sens large entre 9 et 85.

Si on l'applique à la fonction f_2 , l'algorithme affichera 77.

Partie C

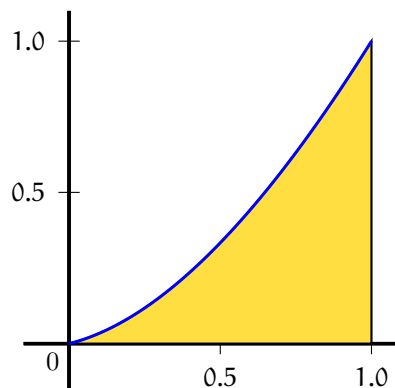
1) a) La fonction f_1 est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_1} &= \int_0^1 x e^{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0,32 \text{ (arrondi à } 10^{-2} \text{)}. \end{aligned}$$



b) La fonction f_2 est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_2} &= \int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4} \right) dx = [2x^2 - 15x + 60 \ln(x+4)]_0^1 = -13 + 60 \ln(5) - 60 \ln(4) \\ &= -13 + 60 \ln\left(\frac{5}{4}\right) = -13 + 60 \ln(1,25) = 0,39 \text{ (arrondi à } 10^{-2}\text{)}. \end{aligned}$$



2) Donc, la fonction f_1 est celle qui éclaircit le plus l'image.

EXERCICE 4 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A : préliminaires

1) a) $n \times n^3 = n^4 = (n^2)^2$. Par hypothèse, $n^2 \equiv N - 1$ modulo N ou encore $n^2 \equiv -1$ modulo N . Par suite, $(n^2)^2 \equiv (-1)^2$ modulo N ou encore

$$n \times n^3 \equiv 1 \pmod{N}.$$

b) On applique le résultat précédent à $n = 5$ et $N = 26$. On a $n^2 = 25$ avec $25 \equiv 26 - 1$ modulo 26 .

D'après la question précédente, si on prend $k_1 = n^3$, alors $5k_1 = n \times n^3 \equiv 1$ modulo 26 . L'entier $k_1 = 125$ convient.

2) a) $6A - A^2 = 6 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2.$

b) Par suite, $A \times (6I - A) = (6I - A) \times A = 5I_2$ ou encore $A \times \frac{1}{5}(6I - A) = \frac{1}{5}(6I - A) \times A = I_2$. On en déduit que la matrice A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A.$$

c) $5A^{-1} = 6I - A = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = B.$

d) $AX = Y \Rightarrow 5A^{-1}AX = 5A^{-1}Y \Rightarrow 5I_2X = BY \Rightarrow 5X = BY.$

Partie B : procédure et codage

• Le mot « ET » est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} 4 & \\ & 19 \end{pmatrix}$.

• La matrice X est transformée en la matrice

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \\ & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & \\ & 50 \end{pmatrix}.$$

• $35 = 1 \times 26 + 9$ avec $0 \leq 9 \leq 25$ et $50 = 1 \times 26 + 24$ avec $0 \leq 24 \leq 25$. Donc $r_1 = 9$ et $r_2 = 24$ ou encore $R = Y = \begin{pmatrix} 9 & \\ & 24 \end{pmatrix}$.

• Le vecteur colonne R est associé au mot « JY ».

Le mot « ET » est codé en le mot « JY ».

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

1) D'après la question 2)d) de la partie A, on a $5X = BY$ et donc

$$\begin{pmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \end{pmatrix} = 5X = BY = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ -3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix},$$

et donc $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

2) On multiplie chacune des deux égalités précédentes par l'entier $k = 21$. Puisque $5k \equiv 1$ modulo 26 la question 1)b) de la partie A, on obtient

$$\begin{cases} x_1 \equiv 42y_1 - 21y_2 \\ x_2 \equiv -63y_1 + 84y_2 \end{cases} \pmod{26} \quad (*).$$

D'autre part, $42 = 1 \times 26 + 16$ et donc $42 \equiv 16$ modulo 26 . Ensuite, $-21 = (-1) \times 26 + 5$ et donc $-21 \equiv 5$ modulo 26 . Ensuite, $-63 = (-3) \times 26 + 15$ et donc $-63 \equiv 15$ modulo 26 . Enfin, $84 = 3 \times 26 + 6$ et donc $84 \equiv 6$ modulo 26 . (*) peut donc encore s'écrire

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \pmod{26}.$$

3) Le mot « QP » est associé au vecteur $Y = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, modulo 26 $x_1 \equiv 16 \times 16 + 5 \times 15$ ou encore $x_1 \equiv 331$. Puisque $331 = 12 \times 26 + 19$, on a encore $x_1 \equiv 19$ modulo 26 et finalement $x_1 = 19$.

De même, $x_2 \equiv 15 \times 16 + 6 \times 15$ ou encore $x_2 \equiv 330$ puis $x_2 \equiv 18$ modulo 26 et finalement $x_2 = 18$.

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \end{pmatrix}$ est associé au mot « TS » et donc

Le mot « QP » code le mot « TS ».