Asie 2014. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Question 1	**réponse c)**
Question 2	**réponse c)**
Question 3	**réponse d)**
Question 4	**réponse a)**

Explication 1. Les droites des propositions a) et d) sont dirigées par des vecteurs non colinéaires à $\overrightarrow{u}$. Donc les réponses a) et d) sont fausses. Par contre, les droites des propositions b) et c) sont dirigées par des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$.

Quand $t = -1$ dans la droite de la proposition c), on obtient le point A. Donc la bonne réponse c). Vérifions explicitement que la réponse b) est fausse. Si le point A appartient à la droite de la proposition b), il existe un réel t tel que $-1 + 2t = 1$ ou encore $t = 1$ et aussi $1 - t = -1$ et donc $t = 2$. Ceci est impossible et donc le point A n'appartient pas à la droite de la proposition b).

Explication 2. La droite $\mathscr{D}_2$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}_2(1, -1, -2)$. D'autre part, le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{u}_2.\overrightarrow{n} = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + (-2) \times (-1) = 3 \neq 0.$$

Donc la droite $\mathscr{D}_2$ est sécante au plan $\mathscr{P}$. La réponse a) est fausse.

Soit $M(1 + t, -3 - t, 2 - 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}_2$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2(1 + t) + (-3 - t) - (2 - 2t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}.$$

Quand $t = -\frac{2}{3}$, on obtient le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$. La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. On sait que la proposition a) est fausse.

On rappelle qu'un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 1, -1)$. D'autre part, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(0, 2, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1, 4, 2)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C définissent un unique plan. Ensuite,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 0 + 1 \times 2 + (-1) \times 2 = 2 - 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + 1 \times 4 + (-1) \times 2 = -2 + 4 - 2 = 0$$

.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On en déduit que les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles. La proposition c) est donc fausse.

$2x_A + y_A - z_A + 5 = 2 - 1 + 1 + 5 = 7 \neq 0$. Donc le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$. On en déduit que la proposition b) est fausse et la proposition d) est vraie.

Explication 4. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-1) + 4 \times 2 + 2 \times 2 = 12$.
Ensuite, $AB = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$. Donc

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{12}{2\sqrt{2} \times \sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{42}}.$$

La calculatrice fournit une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$: $\widehat{BAC} = 22,2\,°$ arrondi au dixième de degré. La bonne réponse est la réponse a).

EXERCICE 2

Partie A

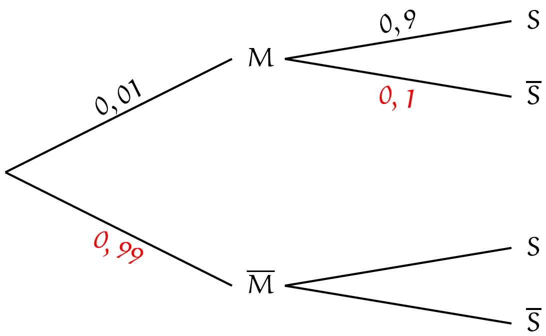
1) a) La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b) On sait que $P(X \leqslant \mu) = \dfrac{1}{2}$.

2) La calculatrice fournit $P(37,9 \leqslant X \leqslant 53,1) = 0,95$ arrondi au centième.

Partie B

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



$P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0,01 \times 0,9 = 0,009$.

b) La probabilité demandée est $P_S(M)$.

$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0,009}{0,3} = 0,03.$$

2) a) $P(H) = P(X > \alpha) = 1 - P(X \leqslant \alpha) = 1 - 0,995 = 0,005$.

b) La probabilité demandée est $P_{\overline{H}}(M)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(M) = P(M \cap H) + P\left(M \cap \overline{H}\right) = P(H) \times P_H(M) + P\left(\overline{H}\right) \times P_{\overline{H}}(M)$$

et donc

$$0,01 = 0,005 \times 0,6 + 0,995 \times P_{\overline{H}}(M)$$

puis

$$P_{\overline{H}}(M) = \frac{0,01 - 0,005 \times 0,6}{0,995} = 0,007 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie C

1) Ici, $n = 1\,000$ et $p = P(M) = 0,01$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 10$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 990$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille 1 000 est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,01 - 1,96\frac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{1000}}, 0,01 + 1,96\frac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{1000}}\right].$$

En arrondissant au millième, on obtient l'intervalle $[0,004; 0,016]$.

2) La fréquence observée est $f = \dfrac{14}{1000} = 0,014$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. Donc, on ne pas peut décider au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie.

EXERCICE 3

1) • La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$$f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x-1) \times 2e^{2x} - 1 = (1+2x-2)e^{2x} - 1 = (2x-1)e^{2x} - 1.$$

• $f'(0) = -e^0 - 1 = -2$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{2x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

2) De même, la fonction f' est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$$f''(x) = 2 \times e^{2x} + (2x-1) \times 2e^{2x} = (4x-2+2)e^{2x} = 4xe^{2x}.$$

3) Ainsi, la fonction f' est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée, à savoir la fonction f'', est strcitement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction f' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

La fonction f' est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f'(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right[= [-2,+\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$.

En particulier, puisque 0 est dans $[-2,+\infty[$, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.

4) a) Puisque la fonction f' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, pour $0 \leqslant x < x_0$, on a $f(x) < f'(x_0)$ ou encore $f'(x) < 0$ et pour $x > x_0$, on a $f'(x) > 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, x_0]$ et est strictement croissante sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$.

Puisque f est décroissante sur $[0, x_0]$, pour $0 \leqslant x \leqslant x_0$, on a $f(x) \leqslant f(0)$ avec $f(0) = -e^0 - 1 = -2$.
En particulier, la fonction f est strictement négative sur $[0, x_0]$. On note que $f'(2) = 3e^4 - 1 = 162,7\ldots > 0$ et en particulier que $x_0 < 2$.

b) $f(2) = e^4 - 3 = 51,5\ldots$ puis pour $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant f(2) > 0$ par croissance de la fonction f sur $[x_0, +\infty[$ et en particulier sur $[2,+\infty[$. Mais alors la fonction f ne s'annule pas sur $[2,+\infty[$.

Sur l'intervalle $[x_0, 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante et vérifie $f(x_0) < 0$ et $f(2) > 0$. Comme à la question précédente, la fonction f s'annule une fois et une seule sur $[x_0, 2]$.

En résumé, la fonction f ne s'annule pas sur $[0, x_0]$ et sur $[2,+\infty[$ et s'annule une fois et une seule sur $[x_0, 2]$. Finalement, la fonction f s'annule sur $[0,+\infty[$ pour une unique valeur notée a. On note que la fonction f est strictement négative sur $[0, a[$ et strictement positive sur $]a, +\infty[$.

La calculatrice donne $f(1,195) = -0,06\ldots < 0$ et $f(1,2) = 0,04\ldots > 0$. Donc $1,195 < a < 1,2$. En particulier,

$$\boxed{a = 1,2 \text{ arrondi au centième.}}$$

5)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \left(e^{ax} + e^{-ax}\right)\,dx = \left[\frac{e^{ax}}{a} + \frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^1 = \left(\frac{e^a}{a} - \frac{e^{-a}}{a}\right) - \left(\frac{e^0}{a} - \frac{e^0}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(e^a - e^{-a}\right) = \frac{1}{1,2}\left(e^{1,2} - e^{-1,2}\right) = 2,517\ldots. \end{aligned}$$

La longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités est environ $2,52$ unités de longueur.

EXERCICE 4

Partie A

1) Il existe au moins un nombre premier à savoir 2. Donc n est supérieur ou égal à 1. Ensuite,

$$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1 \geqslant p_1 + 1 \geqslant 2 + 1 \geqslant 2.$$

Donc, E est un entier supérieur ou égal à 2.

Soit k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrons que E et p_k sont premiers entre eux.

$$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1 \Leftrightarrow 1 \times E + (-p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{k-1} \times p_{k+1} \times \cdots \times p_n) \times p_k = 1.$$

En posant $u = 1$ et $v = -p_1 \times p\ _2 \times \cdots \times p_{k-1} \times p_{k+1} \times \cdots \times p_n$, on a obtenu deux entiers relatifs u et v tels que $uE + vp_k = 1$. D'après le théorème de BÉZOUT, les entiers E et p_k sont premiers entre eux.

On a montré que E est premier avec chacun des nombres p_1, p_2, ..., p_n.

2) Puisque $E \geqslant 2$, E admet au moins un diviseur premier noté p. Puisque E est premier avec chacun des nombres premiers p_1, p_2, ..., p_n, le nombre premier p n'est aucun de ces nombres et est donc un nouveau nombre premier ce qui contredit l'hypothèse. Donc l'ensemble des nombres premiers est infini.

Partie B

1) a) Les nombres de MERSENNE M_2, ..., M_{10} :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

b) Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 10 sont 2, 3, 5 et 7.

• $M_2 = 3$ est premier.
• $M_3 = 7$ est premier.
• $M_5 = 31$ est premier car 31 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 qui sont les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{31} = 5, \ldots$.
• $M_7 = 127$ est premier car 127 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11 qui sont les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{127} = 11, \ldots$.

Il semble cohérent de conjecturer que, si k est un nombre premier, le nombre M_k est premier.

2) a) Soient p et q deux entiers naturels non nuls. On sait que pour tout nombre réel Q différent de 1 et tout entier naturel n,

$$1 + Q + Q^2 + \ldots + Q^n = \frac{1 - Q^{n+1}}{1 - Q}.$$

Ici, $Q = 2^p$ et donc Q est supérieur ou égal à 2 car p est supérieur ou égal à 1. En particulier, $Q \neq 1$. D'autre part $n = q - 1$ est un entier naturel et on peut donc écrire

$$1 + 2^p + + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots (2^p)^{q-1} = \frac{1 - (2^p)^q}{1 - 2^p} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}.$$

b) L'égalité précédente s'écrit encore

$$2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)\left(1 + 2^p + + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots (2^p)^{q-1}\right).$$

Puisque $2^p - 1$ et $1 + 2^p + + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots (2^p)^{q-1}$ sont des entiers, on a montré que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c) Soit $k \geqslant 2$. Supposons que k ne soit pas premier. Il existe alors deux entiers naturels p et q supérieurs ou égaux à 2 tels que $k = pq$.

D'après la question précédente, l'entier $M_k = 2^{pq} - 1$ est divisible par l'entier $2^p - 1$. Ensuite, puisque $p \geqslant 2$, $2^p - 1$ est supérieur ou égal à 3 et en particulier $2^p - 1 \geqslant 2$. D'autre part,

$$2^{pq} - 2^p = 2^p\left(2^{p(q-1)} - 1\right) > 0$$

puisque $q \geqslant 2$ et donc $p(q-1) > 0$. Par suite, $2^p < 2^{pq}$ puis $2^p - 1 < M_k$.

Ainsi, on a trouvé un diviseur de M_k, à savoir $d = 2^p - 1$, vérifiant $2 \leqslant d < M_k$. Donc M_k n'est pas premier. On a montré que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3) a) $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$. $\sqrt{2047} = 45, \ldots$ et donc M_{11} est premier si et seulement si il n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à 45.

La calculatrice fournit $2047 = 23 \times 89$ et on a montré que M_{11} n'est pas premier.

b) La conjecture émise à la question 1. b. était donc fausse.

Partie C

1) Ici $n = 5$ et donc $n - 2 = 3$.

- $u_1 = u_0^2 - 2 = 14$.
- $u_2 = u_1^2 - 2 = 194$.
- $u_3 = u_2^2 - 2 = 37634 = 31 \times 1214$.

Par suite, $u_3 \equiv 0 \pmod{M_5}$ et le test de Lucas-Lehmer permet de redémontrer le fait que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

2) Algorithme complété.

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$ M prend la valeur $2^n - 1$ Pour i allant de 1 à $n - 2$ faire u prend la valeur $u^2 - 2$ Fin Pour Si M divise u alors afficher « M indice n est premier » sinon afficher « M indice n n'est pas premier »